

Corrigé Ecricome 2010

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	5
Exercice 3	8

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2010.

Exercice 1

Partie I

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est une valeur propre de M_a si et seulement s'il existe une matrice colonne non nulle $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $M_a U = \lambda U$. Cette égalité équivaut au système

$$\begin{cases} (a+2)x - (2a+1)y + az = \lambda x, \\ x = \lambda y, \\ y = \lambda z. \end{cases}$$

Si $z = 0$, les deux dernières équations donnent successivement $y = 0$ puis $x = 0$, ce qui contredit $U \neq 0$. On a donc $z \neq 0$, puis $y = \lambda z$ et $x = \lambda^2 z$. La première équation devient

$$(\lambda^3 - (a+2)\lambda^2 + (2a+1)\lambda - a)z = 0.$$

Comme $z \neq 0$, cela équivaut à $Q(\lambda) = 0$.

Réciproquement, si $Q(\lambda) = 0$, la matrice colonne

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

est non nulle et le calcul précédent, lu en sens inverse, donne $M_a U_\lambda = \lambda U_\lambda$. Ainsi,

$$\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } M_a \iff Q(\lambda) = 0.}$$

2. On calcule

$$Q(1) = 1 - (a+2) + (2a+1) - a = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{1 \text{ est une racine de } Q.}$$

3. Un développement direct donne

$$\begin{aligned} (x-1)^2(x-a) &= (x^2 - 2x + 1)(x-a) \\ &= x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a \\ &= Q(x). \end{aligned}$$

Ainsi, si $a \neq 1$, les racines de Q sont les deux réels distincts 1 et a . Si $a = 1$, le polynôme vaut $(x-1)^3$ et possède pour seule racine 1. Donc

$$\boxed{\begin{cases} a \neq 1 : Q \text{ possède les deux racines distinctes 1 et } a, \\ a = 1 : Q \text{ possède l'unique racine 1.} \end{cases}}$$

4. D'après les questions précédentes, M_1 possède pour unique valeur propre 1. Si M_1 était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux seraient égaux à 1, donc à I_3 . On aurait alors $M_1 = I_3$. Or

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3.$$

Il en résulte

$$\boxed{M_1 \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose $a \neq 1$.

1. Considérons des réels r, s, t tels que

$$re'_1 + se'_2 + te'_3 = 0.$$

En écrivant les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, on obtient

$$\begin{cases} a^2r + s + 2t = 0, \\ ar + s + t = 0, \\ r + s = 0. \end{cases}$$

La troisième équation donne $s = -r$. La deuxième donne alors $t = (1 - a)r$. En reportant dans la première,

$$(a^2 - 1 + 2(1 - a))r = (a - 1)^2r = 0.$$

Comme $a \neq 1$, on a $r = 0$, puis $s = 0$ et $t = 0$. La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre. Elle contient trois vecteurs de l'espace E , qui est de dimension 3. D'après le théorème de la base, elle est une base de E . Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est une base de } E.}$$

2. La matrice colonne des coordonnées de e'_1 dans $\mathcal{B}$ est

$$U_1 = \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} M_a U_1 &= \begin{pmatrix} (a+2)a^2 - (2a+1)a + a \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^3 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $U_1 \neq 0$, on obtient

$$\boxed{e'_1 \text{ est un vecteur propre de } M_a \text{ associé à la valeur propre } a.}$$

3. On identifie encore les vecteurs à leurs colonnes dans $\mathcal{B}$. Pour e'_2 , on a

$$M_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 - (2a+1) + a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $M_a(e'_2) = e'_2$. De même,

$$M_a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a+2) - (2a+1) \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = e'_2 + e'_3.$$

Les images des deux vecteurs qui engendrent F appartiennent donc à F . Par linéarité,

$$\boxed{M_a(F) \subset F.}$$

4. Les résultats précédents donnent

$$M_a(e'_1) = ae'_1, \quad M_a(e'_2) = e'_2, \quad M_a(e'_3) = e'_2 + e'_3.$$

Les colonnes de la matrice de l'endomorphisme dans la base $\mathcal{B}'$ sont les coordonnées de ces trois images. Par la formule de changement de base, cette matrice est $T_a = P_a^{-1}M_aP_a$. Ainsi,

$$T_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_a^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$, le membre de droite vaut I_3 , qui est bien T_a^0 . Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} T_a^{n+1} &= T_a^n T_a \\ &= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire. Par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_a^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie III

1. Par définition,

$$M_2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

2. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

La question précédente donne $U_{n+1} = M_2 U_n$. Montrons par récurrence que $U_n = M_2^n U_0$. Pour $n = 0$, cette égalité est immédiate. Si elle est vraie au rang n , alors

$$U_{n+1} = M_2 U_n = M_2 M_2^n U_0 = M_2^{n+1} U_0.$$

Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $T_2 = P_2^{-1} M_2 P_2$, donc $M_2 = P_2 T_2 P_2^{-1}$ et une récurrence immédiate donne $M_2^n = P_2 T_2^n P_2^{-1}$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} .}$$

3. D'après la définition de la base $\mathcal{B}'$ avec $a = 2$,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les produits directs donnent $P_2 Q = I_3$ et $Q P_2 = I_3$. Ainsi,

$$P_2^{-1} = Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme $(u_2, u_1, u_0) = (0, -1, 1)$,

$$P_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

La partie II donne alors

$$T_2^n \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n \\ -2 - 5n \\ -5 \end{pmatrix}.$$

En multipliant par P_2 ,

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cdot 2^n - 5n - 12 \\ 6 \cdot 2^n - 5n - 7 \\ 3 \cdot 2^n - 5n - 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\boxed{P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad u_n = 3 \cdot 2^n - 5n - 2.}$$

4. Par croissances comparées,

$$\frac{n}{2^n} \rightarrow 0.$$

On peut écrire

$$u_n = 2^n \left(3 - \frac{5n+2}{2^n} \right).$$

Le facteur entre parenthèses tend vers 3, tandis que 2^n tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty; \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ n'est donc pas convergente.}$$

Exercice 2

Partie I

1. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $\ln(x) \rightarrow -\infty$, $\ln(x+1) \rightarrow 0$ et $1/x \rightarrow +\infty$. Pour éviter une forme indéterminée, on écrit

$$\varphi(x) = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{x}.$$

Par croissances comparées, $x \ln(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. De plus, $x \ln(x+1) \rightarrow 0$. Ainsi,

$$x\varphi(x) = x \ln(x) - x \ln(x+1) + 1 \rightarrow 1.$$

Il existe donc un voisinage à droite de 0 sur lequel $x\varphi(x) \geq 1/2$, d'où $\varphi(x) \geq 1/(2x)$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty.$$

Graphiquement, la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de φ .

$$x = 0 \text{ est une asymptote verticale à la courbe de } \varphi.$$

2. On a

$$\varphi(x) = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{x} = -\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $1/x \rightarrow 0$ et, par continuité de $\ln$ en 1, $\ln(1 + 1/x) \rightarrow 0$. Il vient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

Graphiquement, la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$:

$$y = 0 \text{ est une asymptote horizontale à la courbe de } \varphi.$$

3. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2(x+1)} < 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.$$

4. Les trois questions précédentes donnent le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	—	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0

5. La fonction φ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 3 = 3 - \ln(4).$$

Comme $\ln(4) = 2\ln(2) \simeq 1,4$, on a $\varphi(1/3) \simeq 1,6 > 1$. D'autre part,

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = 2 - \ln(3) \simeq 0,9 < 1.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une solution $\alpha \in]1/3, 1/2[$ de l'équation $\varphi(x) = 1$. La stricte décroissance assure son unicité. Ainsi,

$$\varphi(x) = 1 \text{ possède une unique solution } \alpha, \quad \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}.$$

6. Puisque φ est décroissante, si $\varphi(m) > 1$, alors $\alpha > m$; sinon $\alpha \leq m$.

```
import numpy as np

def phi(x):
    return np.log(x)-np.log(x+1)+1/x

def encadrement():
    a = 1/3
    b = 1/2
    while b-a > 10**(-2):
        m = (a+b)/2
        if phi(m) > 1:
            a = m
        else:
            b = m
    return [a,b]
```

Partie II

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $] -\infty, \alpha[$ et sur $] \alpha, +\infty[$, et elle ne présente qu'une discontinuité éventuelle en α . Pour $x > \alpha$, la question I.3 donne

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} = -\varphi'(x).$$

Pour $A > \alpha$,

$$\int_{\alpha}^A f(x) dx = - \int_{\alpha}^A \varphi'(x) dx = \varphi(\alpha) - \varphi(A).$$

Or $\varphi(\alpha) = 1$ et $\varphi(A) \rightarrow 0$ lorsque $A \rightarrow +\infty$. L'intégrale converge donc et vaut 1. Les critères caractérisant une densité étant satisfaits,

f est une densité de probabilité.

2. Pour $x > \alpha$,

$$xf(x) = \frac{1}{x(x+1)} > 0.$$

Sur tout segment $[\alpha, A]$, cette fonction est continue. Pour $x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{x(x+1)} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} 1/x^2 dx$ converge. Par comparaison, le critère de comparaison montre que $\int_\alpha^{+\infty} xf(x) dx$ converge. Par conséquent,

X admet une espérance.

3. Pour $x > \alpha$, on a

$$\varphi'(x) + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2(x+1)} = xf(x).$$

Ainsi,

$$\forall x > \alpha, \quad xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}.$$

Pour $A > \alpha$,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^A xf(x) dx &= \int_\alpha^A \varphi'(x) dx + \int_\alpha^A \frac{dx}{x^2} \\ &= \varphi(A) - \varphi(\alpha) + \left[-\frac{1}{x} \right]_\alpha^A \\ &= \varphi(A) - 1 - \frac{1}{A} + \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$,

$$\mathbb{E}(X) = -1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Comme $1/3 < \alpha < 1/2$ et que la fonction $x \mapsto 1/x - 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$1 < \frac{1}{\alpha} - 1 < 2.$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}, \quad 1 < \mathbb{E}(X) < 2.$$

4. Pour $x > \alpha$,

$$x^2 f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Pour $A > \max(1, \alpha)$,

$$\int_{\max(1, \alpha)}^A \frac{dx}{x+1} = \ln(A+1) - \ln(\max(1, \alpha)+1),$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $A \rightarrow +\infty$. Ainsi, le moment $\mathbb{E}(X^2)$ n'existe pas. Une variance ne peut donc pas être définie, et

X n'admet pas de variance.

Exercice 3

Partie I

1. Les 36 couples de résultats des deux dés sont équiprobables. Il y a 6 couples donnant deux résultats égaux, donc

$$\mathbb{P}(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Pour $D_1 < D_2$, le nombre de couples favorables est $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Par symétrie entre les deux dés, il y a aussi 15 couples tels que $D_1 > D_2$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \frac{5}{12}, \quad \mathbb{P}(E_2) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(E_3) = \frac{5}{12}.}$$

2. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i vaut 0 sur E_1 , 2 sur E_2 et 1 sur E_3 . Sa loi est donc

$$\frac{x}{\mathbb{P}(X_i = x)} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

Comme X_i ne prend qu'un nombre fini de valeurs, ses deux premiers moments existent. On calcule

$$\mathbb{E}(X_i) = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{4},$$

puis

$$\mathbb{E}(X_i^2) = \frac{5}{12} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{13}{12}.$$

Par la formule de König–Huygens,

$$\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{13}{12} - \frac{9}{16} = \frac{25}{48}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{x}{\mathbb{P}(X_i = x)} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \end{array} \right. \quad \mathbb{E}(X_i) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{V}(X_i) = \frac{25}{48}.}$$

3. Après une seule partie, le total des points est le nombre de points obtenu pendant cette partie : $Y_1 = X_1$. Par conséquent,

$$\frac{y}{\mathbb{P}(Y_1 = y)} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

4. On a $Y_2 = X_1 + X_2$. Les deux parties étant indépendantes, X_1 et X_2 sont indépendantes. On calcule alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_2 = 0) &= \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144}, \\ \mathbb{P}(Y_2 = 1) &= 2 \frac{5}{12} \frac{5}{12} = \frac{50}{144}, \\ \mathbb{P}(Y_2 = 2) &= 2 \frac{5}{12} \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{45}{144}, \\ \mathbb{P}(Y_2 = 3) &= 2 \frac{5}{12} \frac{1}{6} = \frac{20}{144}, \\ \mathbb{P}(Y_2 = 4) &= \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{4}{144}. \end{aligned}$$

Ces probabilités ont pour somme 1. D'où

y	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(Y_2 = y)$	$\frac{25}{144}$	$\frac{50}{144}$	$\frac{45}{144}$	$\frac{20}{144}$	$\frac{4}{144}$

5. (a) Chacune des trois parties rapporte 0, 1 ou 2 points. Toutes les valeurs entières de 0 à 6 peuvent être obtenues. Ainsi,

$$Y_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- (b) On a $Y_3 = Y_2 + X_3$, et X_3 est indépendante de Y_2 , puisque Y_2 dépend seulement des deux premières parties. Par exemple,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y_2 = 1] \cap [Y_3 = 3]) &= \mathbb{P}([Y_2 = 1] \cap [X_3 = 2]) \\ &= \mathbb{P}(Y_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 2) \\ &= \frac{50}{144} \frac{1}{6} = \frac{100}{1728}.\end{aligned}$$

On procède de la même façon pour les autres cases. Le tableau de la loi conjointe est

	$Y_3 = 0$	$Y_3 = 1$	$Y_3 = 2$	$Y_3 = 3$	$Y_3 = 4$	$Y_3 = 5$	$Y_3 = 6$
$Y_2 = 0$	125/1728	125/1728	50/1728	0	0	0	0
$Y_2 = 1$	0	250/1728	250/1728	100/1728	0	0	0
$Y_2 = 2$	0	0	225/1728	225/1728	90/1728	0	0
$Y_2 = 3$	0	0	0	100/1728	100/1728	40/1728	0
$Y_2 = 4$	0	0	0	0	20/1728	20/1728	8/1728

- (c) Les événements $([Y_2 = j])_{0 \leq j \leq 4}$ forment un système complet d'événements. Les formules des probabilités totales reviennent ici à sommer les colonnes du tableau précédent. On obtient

y	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y_3 = y)$	$\frac{125}{1728}$	$\frac{375}{1728}$	$\frac{525}{1728}$	$\frac{425}{1728}$	$\frac{210}{1728}$	$\frac{60}{1728}$	$\frac{8}{1728}$

6. (a) Le total après n parties est la somme des points obtenus au cours de chacune d'elles :

$$Y_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n \frac{3}{4} = \frac{3n}{4}.$$

Les parties étant indépendantes, les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. La variance d'une somme de variables indépendantes est la somme de leurs variances. Ainsi,

$$\mathbb{V}(Y_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = n \frac{25}{48} = \frac{25n}{48}.$$

On conclut que

$$Y_n = X_1 + \dots + X_n, \quad \mathbb{E}(Y_n) = \frac{3n}{4}, \quad \mathbb{V}(Y_n) = \frac{25n}{48}.$$

- (b) Le nombre moyen de points après n parties est supérieur à 10 si et seulement si

$$\frac{3n}{4} > 10 \iff n > \frac{40}{3}.$$

Le plus petit entier naturel vérifiant cette inégalité est 14. Donc

le joueur doit effectuer au minimum 14 parties.

Partie II

1. (a) La variable T_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. L'événement $[T_1 = k]$ signifie que le joueur a obtenu 0 point lors des $k - 1$ premières parties, puis au moins 1 point à la k -ième. Par indépendance des parties,

$$\mathbb{P}(T_1 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{7}{12}.$$

On reconnaît la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $7/12$. Ainsi,

$$T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T_1 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{7}{12}.$$

- (b) Les formules de la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p sont $\mathbb{E}(T) = 1/p$ et $\mathbb{V}(T) = (1-p)/p^2$. Ici $p = 7/12$, donc

$$\mathbb{E}(T_1) = \frac{12}{7} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(T_1) = \frac{5/12}{(7/12)^2} = \frac{60}{49}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(T_1) = \frac{12}{7}, \quad \mathbb{V}(T_1) = \frac{60}{49}.$$

2. (a) Le score cumulé peut atteindre ou dépasser 2 dès la première partie. Pour tout $k \geq 1$, l'événement constitué de $k - 1$ parties à 0 point suivies d'une partie à 2 points réalise $T_2 = k$. Ainsi,

$$T_2(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

- (b) Le score atteint au moins 2 dès la première partie si et seulement si $X_1 = 2$. Donc

$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{6}.$$

Pour $T_2 = 2$, deux situations incompatibles sont possibles :

$$[X_1 = 0] \cap [X_2 = 2] \quad \text{ou} \quad [X_1 = 1] \cap [X_2 \geq 1].$$

Par indépendance des parties,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2 = 2) &= \frac{5}{12} \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \frac{7}{12} \\ &= \frac{10}{144} + \frac{35}{144} = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{5}{16}.$$

- (c) Soit $k \geq 3$. Pour avoir $T_2 = k$, le score après $k - 1$ parties doit être 0 ou 1.

S'il vaut 0, les $k - 1$ premières parties ont toutes rapporté 0 point, puis la k -ième doit rapporter 2 points. La probabilité correspondante est

$$\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

S'il vaut 1, exactement l'une des $k - 1$ premières parties a rapporté 1 point et toutes les autres ont rapporté 0 point. Il y a $k - 1$ positions possibles pour cette unique partie.

La k -ième partie doit alors rapporter au moins 1 point. La probabilité correspondante vaut

$$(k-1) \frac{5}{12} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} \frac{7}{12} = (k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{7}{12}.$$

Ces deux situations sont incompatibles. Par conséquent,

$$\forall k \geq 3, \quad \mathbb{P}(T_2 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{1}{6} + (k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \frac{7}{12}.$$

(d) Pour $k = 1$, le membre de droite vaut

$$\left(\frac{5}{12}\right)^0 \frac{1}{6} + 0 \times \left(\frac{5}{12}\right)^0 \frac{7}{12} = \frac{1}{6},$$

qui est bien $\mathbb{P}(T_2 = 1)$. Pour $k = 2$, il vaut

$$\frac{5}{12} \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \frac{7}{12} = \frac{5}{16},$$

qui est bien $\mathbb{P}(T_2 = 2)$. Donc

$$\text{la formule est valable pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

(e) Posons $q = 5/12$. Comme $|q| < 1$, la série géométrique converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}.$$

En dérivant l'égalité finie $1 + q + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$, puis en faisant tendre n vers $+\infty$ à q fixé, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)q^{k-1} = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

La formule de la question précédente donne alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_2 = k) &= \frac{1}{6} \frac{1}{1-q} + \frac{7}{12} \frac{q}{(1-q)^2} \\ &= \frac{1}{6} \frac{12}{7} + \frac{7}{12} \frac{5/12}{(7/12)^2} \\ &= \frac{2}{7} + \frac{5}{7} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_2 = k) = 1.$$

(f) Les événements $([T_2 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles, et leur réunion est l'événement « le joueur atteint un score cumulé supérieur ou égal à 2 ». La question précédente montre que cette réunion a pour probabilité 1. L'événement contraire a donc une probabilité nulle :

$$\mathbb{P}(\text{le joueur n'atteint jamais le score 2}) = 0.$$

(g) Avec $q = 5/12$, on a

$$\mathbb{E}(T_2) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} + \frac{7}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) q^{k-1}.$$

En dérivant une puis deux fois l'égalité finie utilisée à la question précédente, puis en faisant tendre son rang vers $+\infty$, on trouve

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) q^{k-1} = \frac{2q}{(1-q)^3}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_2) &= \frac{1}{6} \frac{1}{(7/12)^2} + \frac{7}{12} \frac{2(5/12)}{(7/12)^3} \\ &= \frac{24}{49} + \frac{120}{49} = \frac{144}{49}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(T_2) = \frac{144}{49}.$$