

# Corrigé Ecricome 2011

Mathématiques appliquées

| Sommaire   |   |
|------------|---|
| Exercice 1 | 1 |
| Exercice 2 | 3 |
| Exercice 3 | 6 |

*Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2011.*

## Exercice 1

1. On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N \neq 0_2.$$

Ainsi,  $N$  est nilpotente. La matrice  $\Delta = I_2$  est diagonale, donc diagonalisable. Enfin,

$$\Delta N = N \Delta = N \quad \text{et} \quad \Delta + N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Les quatre conditions de la définition sont donc satisfaites :

$$\boxed{(\Delta, N) \text{ est le couple demandé pour } A.}$$

2. (a) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre associé.

L'égalité  $AX = \lambda X$  donne

$$\begin{cases} (3 - \lambda)x + y - z = 0, \\ -2x - \lambda y + 2z = 0, \\ (1 - \lambda)z = 0. \end{cases}$$

Si  $\lambda \neq 1$ , alors  $z = 0$ , puis  $y = (\lambda - 3)x$ . Si  $x = 0$ , on aurait aussi  $y = 0$ , ce qui est impossible pour un vecteur propre. Ainsi  $x \neq 0$  et la deuxième équation donne

$$(-2 - \lambda(\lambda - 3))x = 0, \quad \text{soit} \quad (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0.$$

Comme  $\lambda \neq 1$ , on obtient  $\lambda = 2$ . Réciproquement,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $\lambda = 1$ , le système conduit à  $z = 0$  et  $y = -2x$ , et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  est bien un vecteur propre.

Par conséquent,

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont } 1 \text{ et } 2.}$$

(b) Les calculs précédents donnent

$$\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = X\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = 2X\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tous les vecteurs propres ont donc une troisième coordonnée nulle. Ils ne peuvent constituer une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . Ainsi,

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

3. (a) Un calcul direct donne

$$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_1, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_2, \quad \Delta X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = X_3.$$

Donc

$$\boxed{\Delta X_1 = 2X_1, \quad \Delta X_2 = X_2, \quad \Delta X_3 = X_3.}$$

(b) Posons

$$P = (X_1 \ X_2 \ X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$ , la troisième coordonnée donne  $b = 0$  ; les deux premières donnent  $a + c = 0$  et  $-a - 2c = 0$ , donc  $c = a = 0$ . Les trois colonnes forment donc une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $P$  est inversible. Les égalités de la question précédente donnent  $\Delta P = PD$ , d'où  $P^{-1}\Delta P = D$ . La matrice  $\Delta$  est donc semblable à une matrice diagonale. Ainsi,

$$\boxed{\Delta \text{ est diagonalisable et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$$

(c) Pour  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , écrivons  $X = aX_1 + bX_2 + cX_3$ . Les coordonnées donnent

$$x = a + c, \quad y = -a - 2c, \quad z = b,$$

d'où  $a = 2x + y$ ,  $b = z$  et  $c = -x - y$ . La matrice des coordonnées de  $X$  dans la base  $(X_1, X_2, X_3)$  est donc

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (a) On calcule

$$N^2 = 0_3 \quad \text{et} \quad N \neq 0_3.$$

Ainsi,

$$\boxed{N \text{ est nilpotente d'indice 2.}}$$

(b) On a immédiatement  $A = \Delta + N$ . De plus,

$$\Delta N = N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N.$$

La question 3 a établi que  $\Delta$  est diagonalisable et la question précédente que  $N$  est nilpotente. Donc

$$\boxed{(\Delta, N) \text{ satisfait les quatre conditions demandées pour } A.}$$

- (c) Comme  $\Delta N = N\Delta$ , la formule du binôme de Newton s'applique aux matrices  $\Delta$  et  $N$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$A^n = (\Delta + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^{n-k} N^k.$$

Or  $N^k = 0_3$  dès que  $k \geq 2$ , donc

$$\boxed{A^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1}N \quad (n \in \mathbb{N}^*)}.$$

- (d) L'égalité  $\Delta N = N$  a été calculée en 4b). Par récurrence, si  $\Delta^k N = N$  pour un entier  $k \geq 1$ , alors

$$\Delta^{k+1}N = \Delta(\Delta^k N) = \Delta N = N.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta^k N = N.}$$

- (e) Pour  $n \geq 1$ , les deux questions précédentes donnent  $A^n = \Delta^n + nN$ . Comme  $\Delta = PDP^{-1}$ ,

$$\Delta^n = PD^nP^{-1},$$

donc  $\Delta^n$  est diagonalisable. En outre,  $(nN)^2 = 0_3$  et  $nN \neq 0_3$ , donc  $nN$  est nilpotente. Enfin,

$$\Delta^n(nN) = n\Delta^n N = nN \quad \text{et} \quad (nN)\Delta^n = nN.$$

Par conséquent,

$$\boxed{(\Delta^n, nN) \text{ satisfait les quatre conditions demandées pour } A^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)}.$$

## Exercice 2

### Partie I

1. Les croissances comparées donnent  $x^2 \ln(x) \rightarrow +\infty$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty.$$

De plus,

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x} - x \ln(x) \rightarrow -\infty.$$

La courbe possède donc, en  $+\infty$ , une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = -\infty.}$$

2. La fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0,$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$ . Ainsi,

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}.$$

3. Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , les fonctions  $x \mapsto x^2$  et  $\ln$  sont dérivables. La règle du produit donne

$$\varphi'(x) = -2x \ln(x) - x = -x(2 \ln(x) + 1).$$

Donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = -x(2 \ln(x) + 1).}$$

4. On calcule le taux d'accroissement à droite en 0 :

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = -x \ln(x) \longrightarrow 0$$

par croissances comparées. Ainsi  $\varphi$  est dérivable en 0 et  $\varphi'(0) = 0$ . La courbe possède au point  $(0, 1)$  une demi-tangente horizontale. De plus, pour  $0 < x < 1$ ,  $\ln(x) < 0$ , donc  $\varphi(x) > 1$  : la courbe est au-dessus de cette demi-tangente au voisinage de 0. Ainsi,

$$\boxed{\varphi'(0) = 0 \text{ et la demi-tangente en } (0, 1) \text{ est } y = 1.}$$

5. Pour  $x > 0$ , le signe de  $\varphi'(x)$  est l'opposé de celui de  $2 \ln(x) + 1$ . Ce dernier s'annule pour  $x = e^{-1/2}$ , est négatif avant et positif après. Enfin,

$$\varphi(e^{-1/2}) = 1 - e^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2e}.$$

On obtient

|               |   |                             |                    |
|---------------|---|-----------------------------|--------------------|
| $x$           | 0 | $e^{-1/2}$                  | $+\infty$          |
| $\varphi'(x)$ | + | 0                           | -                  |
| $\varphi(x)$  | 1 | $\nearrow 1 + \frac{1}{2e}$ | $\searrow -\infty$ |

6. Sur  $[1, +\infty[$ ,  $\varphi$  est continue et strictement décroissante, avec  $\varphi(1) = 1$  et une limite égale à  $-\infty$ . Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un unique zéro  $\alpha$  sur cet intervalle. Il n'y en a pas avant 1, puisque  $\varphi \geq 1$  sur  $[0, e^{-1/2}]$  puis reste positive jusqu'à 1. En utilisant  $\ln(2) \simeq 0,7$ ,

$$\varphi(\sqrt{2}) = 1 - \ln(2) > 0, \quad \varphi(2) = 1 - 4 \ln(2) < 0.$$

Une nouvelle application du théorème des valeurs intermédiaires donne

$$\boxed{\text{il existe un unique } \alpha > 0 \text{ tel que } \varphi(\alpha) = 0, \quad \sqrt{2} < \alpha < 2.}$$

7. La fonction  $\varphi$  est continue sur le segment  $[0, \alpha]$  ; l'intégrale  $I$  existe donc. Sur  $]0, \alpha]$ ,

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9},$$

ce que l'on vérifie en dérivant. Comme  $x^3 \ln(x) \rightarrow 0$  en  $0^+$ ,

$$\begin{aligned} I &= \left[ x - \frac{x^3}{3} \ln(x) + \frac{x^3}{9} \right]_0^\alpha \\ &= \alpha - \frac{\alpha^3}{3} \ln(\alpha) + \frac{\alpha^3}{9}. \end{aligned}$$

Or  $\varphi(\alpha) = 0$  donne  $\alpha^2 \ln(\alpha) = 1$ , donc

$$\boxed{I = \frac{\alpha(6 + \alpha^2)}{9}.}$$

```

8. import numpy as np

def phi(x):
    return 1-x**2*np.log(x)

def bornes():
    a = np.sqrt(2)
    b = 2
    for k in range(7):
        m = (a+b)/2
        if phi(a)*phi(m) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return [a,b]

bornes()

```

## Partie II

1. Les fonctions  $(x, y) \mapsto xy$ ,  $(x, y) \mapsto \ln(x)$  et  $(x, y) \mapsto \ln(y)$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[^2$ .  
Les règles sur les sommes et les produits donnent

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } ]0, +\infty[^2.$$

2. Pour  $x, y > 0$ ,

$$\partial_1 f(x, y) = y + \frac{\ln(y)}{x}, \quad \partial_2 f(x, y) = x + \frac{\ln(x)}{y}.$$

Au point critique, ces deux expressions sont nulles, donc

$$xy = -\ln(y) = -\ln(x).$$

L'injectivité de  $\ln$  donne  $x = y$ . La première équation devient  $x^2 = -\ln(x)$ . En posant  $t = 1/x$ , elle équivaut à

$$\frac{1}{t^2} = \ln(t), \quad \text{soit} \quad 1 - t^2 \ln(t) = 0.$$

D'après la partie I,  $t = \alpha$  est l'unique solution. Ainsi,

$$\partial_1 f = y + \frac{\ln(y)}{x}, \quad \partial_2 f = x + \frac{\ln(x)}{y}, \quad \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \text{ est l'unique point critique.}$$

3. Une nouvelle dérivation donne

$$\partial_{1,1} f(x, y) = -\frac{\ln(y)}{x^2}, \quad \partial_{2,1} f(x, y) = 1 + \frac{1}{xy}, \quad \partial_{2,2} f(x, y) = -\frac{\ln(x)}{y^2}.$$

Or

$$1 - \varphi(1/y) = \frac{1}{y^2} \ln(1/y) = -\frac{\ln(y)}{y^2},$$

et de même en échangeant  $x$  et  $y$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}\partial_{1,1}f(x,y) &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right), \\ \partial_{2,1}f(x,y) &= 1 + \frac{1}{xy}, \\ \partial_{2,2}f(x,y) &= \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right).\end{aligned}$$

4. Puisque  $\alpha^2 \ln(\alpha) = 1$ , la matrice hessienne au point critique vaut

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \alpha^2 \\ 1 + \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie directement que

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 + \alpha^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\alpha^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres  $2 + \alpha^2$  et  $-\alpha^2$  sont de signes opposés. D'après les conditions suffisantes pour un extremum local, le point critique n'est pas un extremum local. Comme il est unique,

$$f \text{ ne présente aucun extremum local sur } ]0, +\infty[^2.$$

## Exercice 3

### Partie I

1. Les trois cases occupées constituent une partie à trois éléments de l'ensemble des neuf cases. Il y a donc

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

positionnements équiprobables. Ainsi,

$$\text{il y a 84 positionnements possibles.}$$

2. Il y a trois alignements horizontaux, trois verticaux et deux diagonaux. Les positionnements étant équiprobables,

$$\mathbb{P}(H) = \frac{3}{84} = \frac{1}{28}, \quad \mathbb{P}(V) = \frac{1}{28}, \quad \mathbb{P}(D) = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}.$$

3. Les événements  $H$ ,  $V$ ,  $D$  et  $N$  sont deux à deux incompatibles et forment un système complet d'événements. Les formules des probabilités totales donnent

$$\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(D) = 1 - \frac{8}{84}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0,9048.$$

4. (a) La société gagne 2 euros si les jetons ne sont pas alignés et perd 18 euros s'ils le sont. Ainsi,

$$\mathbb{E}(Z_i) = 2 \frac{19}{21} - 18 \frac{2}{21} = \frac{38 - 36}{21}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_i) = \frac{2}{21} \text{ euro.}}$$

- (b) Le gain journalier est  $Z = Z_1 + \dots + Z_{10000}$ . Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Z) = 10000 \mathbb{E}(Z_1) = \frac{20000}{21}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{20000}{21} \text{ euros} \simeq 952,38 \text{ euros.}}$$

## Partie II

1. (a) Chaque partie constitue une épreuve de Bernoulli de succès « gagner », de probabilité  $2/21$ . Les 100 parties sont indépendantes et  $X$  compte les succès. Donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(100, \frac{2}{21}\right)}.$$

- (b) Les formules de la loi binomiale donnent

$$\mathbb{E}(X) = 100 \frac{2}{21} = \frac{200}{21}, \quad \mathbb{V}(X) = 100 \frac{2}{21} \frac{19}{21} = \frac{3800}{441}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{200}{21}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{3800}{441}.$$

- (c) Le joueur perd 2 euros lors de chacune des  $100 - X$  défaites et réalise un gain net de 18 euros lors de chacune des  $X$  victoires. Sa perte algébrique vaut donc

$$T = 2(100 - X) - 18X = 200 - 20X.$$

Ainsi,

$$\boxed{T = 200 - 20X.}$$

2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'indépendance donne

$$\mathbb{P}(\text{au moins une victoire}) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n.$$

Cette probabilité est au moins  $1/2$  si et seulement si

$$n \ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq -\ln 2.$$

Comme  $\ln(19/21) < 0$ , cela équivaut à

$$n \geq \frac{-\ln 2}{\ln(19/21)} \simeq \frac{-0,7}{-0,1} = 7.$$

Pour confirmer l'entier minimal sans dépendre de l'arrondi, on compare directement les puissances :

$$2 \cdot 19^6 = 94\,091\,762 > 21^6 = 85\,766\,121,$$

alors que

$$2 \cdot 19^7 = 1\,787\,743\,478 < 21^7 = 1\,801\,088\,541.$$

Donc

$$\boxed{n_{\min} = 7.}$$

3. (a) Les parties sont indépendantes, chacune étant gagnée avec probabilité  $2/21$ , et  $Y$  est le rang du premier succès. Ainsi,

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{21}\right).}$$

- (b) Les formules de la loi géométrique sur  $\mathbb{N}^*$  donnent

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2/21} = \frac{21}{2}, \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{19/21}{(2/21)^2} = \frac{399}{4}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{21}{2}, \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{399}{4}.}$$

- (c) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , l'événement  $[Y > k]$  signifie que les  $k$  premières parties ont toutes été perdues. Par indépendance,

$$\mathbb{P}(Y > k) = \left(\frac{19}{21}\right)^k.$$

En passant à l'événement contraire,

$$\boxed{p_k = \mathbb{P}(Y \leq k) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k.}$$

### Partie III

1. Sachant  $\Delta$ , la case  $(A, 1)$  est occupée et les deux autres cases sont choisies parmi les huit restantes. Il y a  $\binom{8}{2} = 28$  choix équiprobables. Un seul réalise un alignement horizontal, un seul un alignement vertical et un seul un alignement diagonal. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}_{\Delta}(H) = \mathbb{P}_{\Delta}(V) = \mathbb{P}_{\Delta}(D) = \frac{1}{28}.}$$

2. Sachant  $\Delta$ , les trois événements d'alignement sont incompatibles, donc

$$\mathbb{P}_{\Delta}(N) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}.$$

Lorsque la fonction n'est pas dérégulée,  $\mathbb{P}_{\bar{\Delta}}(N) = 19/21$ . Les événements  $(\Delta, \bar{\Delta})$  forment un système complet d'événements. Les formules des probabilités totales donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N) &= \mathbb{P}(\Delta)\mathbb{P}_{\Delta}(N) + \mathbb{P}(\bar{\Delta})\mathbb{P}_{\bar{\Delta}}(N) \\ &= x\frac{25}{28} + (1-x)\frac{19}{21} = \frac{19}{21} - \frac{x}{84}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}.}$$

3. La société gagne 2 euros sur  $N$  et perd 18 euros sur  $\overline{N}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G) &= 2\mathbb{P}(N) - 18\mathbb{P}(\overline{N}) \\ &= 20\mathbb{P}(N) - 18 = 20\left(\frac{19}{21} - \frac{x}{84}\right) - 18 \\ &= \frac{2 - 5x}{21}.\end{aligned}$$

Par conséquent,  $\mathbb{E}(G) > 0$  si et seulement si  $x < 2/5$ . La valeur seuil est donc

$$x_{\max} = \frac{2}{5} \quad (\text{le gain moyen est positif pour } 0 < x < \frac{2}{5}).$$

4. Posons  $A = H \cup V \cup D$ , événement « les jetons sont alignés ». D'après la question 1,

$$\mathbb{P}_{\Delta}(A) = \frac{3}{28}.$$

De plus, d'après la question 2,

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(N) = \frac{2}{21} + \frac{x}{84} = \frac{x+8}{84}.$$

La formule des probabilités composées donne

$$\mathbb{P}_A(\Delta) = \frac{\mathbb{P}(\Delta)\mathbb{P}_{\Delta}(A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{x(3/28)}{(x+8)/84}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_A(\Delta) = \frac{9x}{x+8}.$$