

Corrigé Ecricome 2012

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	4
Exercice 3	6

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2012.

Exercice 1

1. Montrons la propriété par récurrence. Pour $n = 0$,

$$L + A^0(U_0 - L) = L + U_0 - L = U_0.$$

Supposons l'égalité vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$. Alors, puisque $L = AL + B$,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n + B \\ &= A(L + A^n(U_0 - L)) + B \\ &= AL + B + A^{n+1}(U_0 - L) \\ &= L + A^{n+1}(U_0 - L). \end{aligned}$$

La propriété est initialisée et héréditaire. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = L + A^n(U_0 - L).}$$

2. Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de B . Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Im}(B)$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3.$$

En lisant les trois coefficients, on obtient

$$x = 3\alpha - \beta - 2\gamma, \quad y = \alpha - \gamma, \quad z = 2\alpha - \beta - \gamma,$$

donc $-x + y + z = 0$.

Réciproquement, si $-x + y + z = 0$, alors $x = y + z$ et un calcul direct donne

$$X = yC_1 + (2y - z)C_2.$$

Ainsi $X \in \text{Im}(B)$, et donc

$$\text{Im}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : -x + y + z = 0 \right\}.$$

Or

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Chacune de ses colonnes vérifie la relation $-x + y + z = 0$, donc $\text{Im}(I_3 - A) \subset \text{Im}(B)$. De plus, ses deux premières colonnes sont linéairement indépendantes : la deuxième coordonnée de $\lambda C'_1 + \mu C'_2 = 0$ impose $\lambda = 0$, puis la première impose $\mu = 0$. L'espace défini par l'équation $-x + y + z = 0$ est de dimension 2 ; les deux espaces considérés sont donc égaux. Finalement,

$$\boxed{\text{Im}(B) = \text{Im}(I_3 - A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : -x + y + z = 0 \right\}.$$

3. Notons P_1, P_2, P_3 les colonnes de P . Les produits directs donnent

$$AP_1 = P_1, \quad AP_2 = \frac{1}{2}P_2, \quad AP_3 = \frac{1}{3}P_3.$$

Ces trois matrices colonnes sont donc des vecteurs propres de A . Si $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0$, les trois lignes donnent

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha - \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

La première et la troisième égalité donnent $\gamma = 0$, puis les deux autres donnent $\alpha = \beta = 0$. Les colonnes sont donc linéairement indépendantes et constituent une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi,

P est la matrice dont les colonnes forment une base de vecteurs propres de A .

4. Pour obtenir l'inverse de P , on résout successivement $PX = e_1$, $PX = e_2$ et $PX = e_3$. Le premier système, par exemple, s'écrit

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - z = 0, \\ x + y + z = 0, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les deux autres résolutions donnent

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

et

$$B' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. De $D = P^{-1}AP$, on déduit $A = PDP^{-1}$. Montrons par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$. Pour $n = 0$,

$$PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0.$$

Si l'égalité est vraie au rang n , alors

$$A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} , on obtient

$$A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G,$$

où les trois matrices, indépendantes de n , sont les conjuguées par P des trois matrices diagonales ci-dessus. En particulier,

$$E = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Posons

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}.$$

Comme

$$DL' + B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{2} + 1 & \frac{q}{2} - 1 \\ 0 & 0 & \frac{r}{3} + 1 \end{pmatrix},$$

l'égalité $L' = DL' + B'$ équivaut à

$$p = \frac{p}{2} + 1, \quad q = \frac{q}{2} - 1, \quad r = \frac{r}{3} + 1.$$

On trouve $p = 2$, $q = -2$ et $r = 3/2$. Par conséquent,

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

8. Avec $L = PL'P^{-1}$, les égalités $L' = DL' + B'$, $D = P^{-1}AP$ et $B' = P^{-1}BP$ donnent

$$\begin{aligned} L &= P(DL' + B')P^{-1} \\ &= PDP^{-1}PL'P^{-1} + PB'P^{-1} \\ &= AL + B. \end{aligned}$$

Un calcul, utile pour la suite, donne

$$L = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$L = PL'P^{-1} \quad \text{et} \quad L = AL + B.$$

9. D'après les expressions de E et de L ,

$$EL = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boxed{EL = 0_3.}$$

10. Les suites $((1/2)^n)$ et $((1/3)^n)$ tendent vers 0. L'expression obtenue à la question 6 montre alors, coefficient par coefficient, que A^n tend vers E . D'après la question 1,

$$U_n = L + A^n(U_0 - L).$$

Chaque coefficient de U_n tend donc vers le coefficient correspondant de

$$L + E(U_0 - L) = L + EU_0 - EL = EU_0 + L,$$

car $EL = 0_3$. Finalement,

$$\boxed{U_n \text{ tend coefficient par coefficient vers } EU_0 + L.}$$

Exercice 2

Partie I

1. Pour $x > 0$, le changement de variable $u = tx$ donne

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-u} du = \int_0^1 e^{-tx} dt.$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2, appliquée à $y \mapsto e^{-y}$ en 0, s'écrit

$$e^{-y} = 1 - y + \frac{y^2}{2} + y^2 \varepsilon(y), \quad \varepsilon(y) \longrightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0).$$

Pour $t \in [0, 1]$, on l'applique à $y = tx$. Ainsi,

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2 \int_0^1 t^2 \varepsilon(tx) dt.$$

De plus,

$$\left| \int_0^1 t^2 \varepsilon(tx) dt \right| \leq \max_{0 \leq y \leq x} |\varepsilon(y)| \longrightarrow 0.$$

Il vient donc

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0^+).$$

En particulier, $f(x) \rightarrow 1 = f(0)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. La fonction étant continue sur $]0, +\infty[$, elle est continue sur tout son domaine. Ainsi,

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0^+), \quad f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

2. L'écriture précédente donne

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + o(x) \longrightarrow -\frac{1}{2}.$$

La dérivée à droite, qui est celle à considérer à l'extrémité du domaine, existe donc et

$$\boxed{f'(0) = -\frac{1}{2}.}$$

3. Sur $]0, +\infty[$, le numérateur et le dénominateur de f sont dérivables et le dénominateur ne s'annule pas. La formule de dérivation d'un quotient donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{xe^{-x} - (1 - e^{-x})}{x^2} \\ &= \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}, \quad \text{où} \quad \varphi(x) = (x+1)e^{-x} - 1.}$$

4. La fonction φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$\varphi'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}.$$

Elle est donc décroissante, et même strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme $\varphi(0) = 0$, on a $\varphi(x) < 0$ pour $x > 0$. Par la question précédente, $f'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$. Enfin,

$$0 \leq f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} \leq \frac{1}{x},$$

donc le théorème d'encadrement donne $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Le tableau de variations est

x	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	0	-
$f'(x)$		-
$f(x)$	1	$\searrow$ 0

Partie II

1. Pour $u \in [0, n]$, on a $0 \leq u/n \leq 1$, donc $e^{-u/n} \geq e^{-1}$. Par croissance de l'intégrale,

$$u_n = \int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u} du \geq \frac{1}{e} \int_0^n \frac{du}{1+u} = \frac{1}{e} \ln(n+1).$$

Or $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$. Par comparaison,

$$\boxed{u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$$

2. D'après la partie I, f est continue sur le segment $[0, 1]$. L'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe. Ainsi,

$$\boxed{\int_0^1 f(x) dx \text{ existe.}}$$

3. Puisque $e^{-u/n} \leq 1$,

$$0 \leq \int_0^n \frac{du}{1+u} - u_n = \int_0^n \frac{1 - e^{-u/n}}{1+u} du.$$

Effectuons le changement de variable affine $u = nx$. Il vient

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{1 - e^{-u/n}}{1+u} du &= \int_0^1 \frac{n(1 - e^{-x})}{1+nx} dx \\ &= \int_0^1 \frac{nx}{1+nx} f(x) dx. \end{aligned}$$

Pour $x \in [0, 1]$, $0 \leq nx/(1+nx) \leq 1$ et $f(x) \geq 0$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^n \frac{du}{1+u} - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

4. Posons $C = \int_0^1 f(x) dx$. Comme $\int_0^n \frac{du}{1+u} = \ln(n+1)$, la question précédente donne

$$0 \leq 1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \leq \frac{C}{\ln(n+1)}.$$

Le membre de droite tend vers 0. Le théorème d'encadrement donne

$$\frac{u_n}{\ln(n+1)} \rightarrow 1.$$

Enfin $\ln(n+1)/\ln n \rightarrow 1$, donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

Exercice 3

1. Parmi les $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$ paires de feuilles équiprobables, exactement n sont constituées d'un original et de sa copie. La probabilité d'une pioche réussie vaut donc

$$\frac{n}{n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}.$$

Par passage à l'événement contraire,

$$a_n = 1 - \frac{1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}.$$

2. (a) Pour avoir $T_2 = k$, il faut obtenir $k-2$ échecs successifs alors que la boîte contient deux paires, puis une réussite. La dernière paire restante est ensuite nécessairement piochée à la pioche suivante. Les tirages effectués après chaque échec ont les mêmes probabilités, puisque les deux feuilles sont replacées. Par la formule des probabilités composées,

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbb{P}(T_2 = k) = (1 - a_2)a_2^{k-2}.$$

(b) Pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(S_2 = j) = \mathbb{P}(T_2 = j+1) = (1 - a_2)a_2^{j-1}.$$

Ainsi, S_2 suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $1 - a_2$. Les formules de cette loi donnent

$$\mathbb{E}(S_2) = \frac{1}{1 - a_2}, \quad \mathbb{V}(S_2) = \frac{a_2}{(1 - a_2)^2}.$$

Comme $T_2 = S_2 + 1$,

$$S_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - a_2), \quad \mathbb{E}(T_2) = 1 + \frac{1}{1 - a_2}, \quad \mathbb{V}(T_2) = \frac{a_2}{(1 - a_2)^2}.$$

3. (a) Il est impossible de vider trois paires en seulement deux pioches, donc $\mathbb{P}(T_3 = 2) = 0$. Pour vider la boîte en trois pioches, les deux premières doivent être réussies ; la troisième paire est alors obtenue avec certitude. Ainsi,

$$\mathbb{P}(T_3 = 2) = 0, \quad \mathbb{P}(T_3 = 3) = (1 - a_3)(1 - a_2).$$

- (b) Les événements A_3 et $\overline{A_3}$ forment un système complet d'événements. Si A_3 se réalise, la première pioche est un échec, les feuilles sont replacées et il reste k pioches pour vider une boîte de trois paires : la probabilité conditionnelle correspondante vaut $\mathbb{P}(T_3 = k)$. Si $\overline{A_3}$ se réalise, une paire est retirée et la probabilité de vider les deux paires restantes en k pioches vaut $\mathbb{P}(T_2 = k)$. Les formules des probabilités totales donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_3 = k + 1) &= \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}_{A_3}(T_3 = k + 1) + \mathbb{P}(\overline{A_3})\mathbb{P}_{\overline{A_3}}(T_3 = k + 1) \\ &= a_3\mathbb{P}(T_3 = k) + (1 - a_3)\mathbb{P}(T_2 = k). \end{aligned}$$

Donc

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbb{P}(T_3 = k + 1) = (1 - a_3)\mathbb{P}(T_2 = k) + a_3\mathbb{P}(T_3 = k).$$

- (c) Montrons la formule par récurrence sur $k \geq 2$. Pour $k = 2$, son membre de droite est nul, comme $\mathbb{P}(T_3 = 2)$. Supposons-la vraie à un rang $k \geq 2$. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_3 = k + 1) &= (1 - a_3)(1 - a_2)a_2^{k-2} \\ &\quad + a_3 \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2} (a_3^{k-2} - a_2^{k-2}) \\ &= \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2} ((a_3 - a_2)a_2^{k-2} + a_3^{k-1} - a_3a_2^{k-2}) \\ &= \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2} (a_3^{k-1} - a_2^{k-1}). \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire. Par conséquent,

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbb{P}(T_3 = k) = \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2} (a_3^{k-2} - a_2^{k-2}).$$

- (d) Comme $0 < a_2 < a_3 < 1$, les deux séries géométriques convergent et

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(T_3 = k) &= \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2} \left(\frac{1}{1 - a_3} - \frac{1}{1 - a_2} \right) \\ &= \frac{(1 - a_2) - (1 - a_3)}{a_3 - a_2} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(T_3 = k) = 1.$$

(e) Posons

$$C = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}.$$

Les séries rencontrées convergent car $0 < a_2 < a_3 < 1$. En utilisant, pour $0 < a < 1$, l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $1-a$,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)a^m = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_3 - 1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\mathbb{P}(T_3 = k) \\ &= C \left(\frac{1}{(1-a_3)^2} - \frac{1}{(1-a_2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_3}. \end{aligned}$$

La dernière égalité se vérifie en réduisant les deux membres au même dénominateur. Puisque $T_3 = (T_3 - 1) + 1$,

$$\boxed{\mathbb{E}(T_3 - 1) = \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_3}, \quad \mathbb{E}(T_3) = 1 + \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_3}.}$$

(f) Pour $0 < a < 1$, les formules de la loi géométrique donnent

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)(m+2)a^m = \frac{2}{(1-a)^3}.$$

Les séries correspondantes convergent donc. En posant à nouveau $C = (1-a_2)(1-a_3)/(a_3-a_2)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_3(T_3 - 1)) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(T_3 = k) \\ &= 2C \left(\frac{1}{(1-a_3)^3} - \frac{1}{(1-a_2)^3} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(T_3(T_3 - 1)) = \frac{2(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2} \left(\frac{1}{(1-a_3)^3} - \frac{1}{(1-a_2)^3} \right).}$$

Enfin $T_3^2 = T_3(T_3 - 1) + T_3$. Les deux espérances du membre de droite existent d'après cette question et la précédente. Ainsi $\mathbb{E}(T_3^2)$ existe, puis

$$\boxed{\mathbb{V}(T_3) = \mathbb{E}(T_3^2) - \mathbb{E}(T_3)^2 \text{ existe.}}$$