

Corrigé Ecricome 2013

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	3
Exercice 3	6

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2013.

Exercice 1

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$R'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3).$$

Ainsi, $R'(x) = 0$ exactement pour $x = 1$ ou $x = 3$. Comme $1 < 3$,

$$\boxed{r_1 = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = 3.}$$

2) Le signe de R' est positif sur $] -\infty, 1[$, négatif sur $]1, 3[$ et positif sur $]3, +\infty[$. De plus,

$$R(1) = 1 - 6 + 9 - 3 = 1, \quad R(3) = 27 - 54 + 27 - 3 = -3.$$

Les termes dominants de R donnent $R(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $R(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. On obtient donc

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$R'(x)$		+	-	+
$R(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$

3) La fonction R est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$R(0) = -3 < 0 < R(1), \quad R(1) > 0 > R(3), \quad R(3) < 0,$$

et $R(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence d'une racine dans chacun des intervalles $]0, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$. Les variations strictes obtenues à la question précédente assurent l'unicité sur chacun de ces intervalles. En notant ces racines a, b, c dans l'ordre croissant,

$$\boxed{0 < a < r_1 < b < r_2 < c.}$$

4) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$AX_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 3 - 9\lambda + 6\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Or

$$\lambda X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Comme $X_\lambda \neq 0$, il est vecteur propre de A associé à λ si et seulement si

$$3 - 9\lambda + 6\lambda^2 = \lambda^3,$$

c'est-à-dire si et seulement si $R(\lambda) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{X_\lambda \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda \iff R(\lambda) = 0.}$$

5) Les trois réels distincts a, b, c sont des valeurs propres de A , avec pour vecteurs propres associés X_a, X_b, X_c . D'après la propriété de liberté des vecteurs propres, les vecteurs X_a, X_b, X_c

forment une famille libre. Comme $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 3, cette famille est une base. La matrice ayant ces vecteurs pour colonnes est donc inversible. En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

les égalités $AX_a = aX_a$, $AX_b = bX_b$, $AX_c = cX_c$ donnent $AP = PD$. Ainsi,

$$\boxed{P \text{ est inversible et } A = PDP^{-1}.}$$

6) Soient $M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Par distributivité,

$$\begin{aligned} f(\mu M + \nu N) &= A(\mu M + \nu N) + (\mu M + \nu N)A \\ &= \mu(AM + MA) + \nu(AN + NA) \\ &= \mu f(M) + \nu f(N). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Posons $M' = P^{-1}MP$, de sorte que $M = PM'P^{-1}$. Comme $A = PDP^{-1}$,

$$\begin{aligned} f(M) &= PDP^{-1}PM'P^{-1} + PM'P^{-1}PDP^{-1} \\ &= P(DM' + M'D)P^{-1}. \end{aligned}$$

La multiplication à gauche par P^{-1} et à droite par P donne alors

$$\boxed{f(M) = O_3 \iff DM' + M'D = O_3.}$$

7) Avec $N = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$, on calcule

$$DN = \begin{pmatrix} ap & aq & ar \\ bs & bt & bu \\ cv & cw & cx \end{pmatrix}, \quad ND = \begin{pmatrix} ap & bq & cr \\ as & bt & cu \\ av & bw & cx \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{DN + ND = \begin{pmatrix} 2ap & (a+b)q & (a+c)r \\ (a+b)s & 2bt & (b+c)u \\ (a+c)v & (b+c)w & 2cx \end{pmatrix}.}$$

Les réels a, b, c sont strictement positifs. Tous les coefficients $2a, 2b, 2c, a+b, a+c, b+c$ sont donc non nuls. Si $DN + ND = O_3$, chacune des neuf égalités obtenues impose $p = q = r = s = t = u = v = w = x = 0$. Ainsi,

$$\boxed{DN + ND = O_3 \implies N = O_3.}$$

8) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = O_3$. La question 6 donne $DM' + M'D = O_3$, où $M' = P^{-1}MP$. D'après la question 7, $M' = O_3$, donc $M = PM'P^{-1} = O_3$. Le noyau de f est donc réduit à la matrice nulle : f est injective.

L'application f est un endomorphisme de l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie. D'après le théorème du rang, un endomorphisme injectif en dimension finie est surjectif. Finalement,

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

Exercice 2

Partie I — Étude des zéros de φ

- 1) Pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $\ln(x) \rightarrow -\infty$ et $-1/x \rightarrow -\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote verticale à la courbe de φ .

- 2) Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\ln(x) \rightarrow +\infty$ et $1/x \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

De plus,

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Par croissances comparées, $\ln(x)/x \rightarrow 0$, et $1/x^2 \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0.$$

La courbe possède en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

- 3) Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto -1/x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}.$$

Comme $x+1 > 0$ et $x^2 > 0$,

$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \frac{x+1}{x^2} > 0.$$

- 4) La dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc φ est strictement croissante. Avec les limites déjà obtenues,

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

- 5) La fonction φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et ses limites aux extrémités sont $-\infty$ et $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie donnent l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha > 0$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

Enfin,

$$\varphi(1) = -1 < 0, \quad \varphi(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0.$$

La croissance de φ entraîne

$$\exists! \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(\alpha) = 0, \quad 1 < \alpha < e.$$

Partie II — Étude d'une suite réelle

- 1) Montrons par récurrence que u_n existe et $u_n > \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Initialement, $u_0 = e > \alpha$. Supposons u_n défini et $u_n > \alpha$. Alors $u_n > 0$, donc $\varphi(u_n)$ existe. Comme φ est strictement croissante et $\varphi(\alpha) = 0$,

$$\varphi(u_n) > 0.$$

Ainsi, $u_{n+1} = u_n + \varphi(u_n) > u_n > \alpha$. La propriété est héréditaire, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ existe et } u_n > \alpha.}$$

- 2) Supposons que (u_n) converge vers un réel L . Comme $u_n > \alpha > 0$, on a $L \geq \alpha$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et la relation

$$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n)$$

donne, en passant à la limite, $0 = \varphi(L)$. L'unicité du zéro de φ impose alors

$$\boxed{L = \alpha.}$$

- 3) D'après la première question, $u_n > \alpha$ pour tout n . La croissance de φ donne donc

$$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) > \varphi(\alpha) = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

- 4) Si la suite convergait, sa limite serait α d'après la question 2. Or elle est croissante et $u_0 = e > \alpha$, donc $u_n \geq e > \alpha$ pour tout n , ce qui est impossible pour une suite convergeant vers α . Elle ne converge donc pas. Comme elle est croissante, le théorème de la limite monotone donne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$$

- 5) Le test de la boucle doit être $u < A$. À chaque passage, on remplace u par $\varphi(u) + u$ puis on augmente n d'une unité.

```
import numpy as np

def phi(x):
    return np.log(x)-1/x

A = float(input("Entrer un reel A > 0 : "))
u = np.e
n = 0
while u < A:
    u = phi(u)+u
    n = n+1
print(n)
```

Partie III — Extrema de f

- 1) Sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $(x, y) \mapsto x^{-2}$, $(x, y) \mapsto -y/x$, $(x, y) \mapsto y^2/2$ et $(x, y) \mapsto \exp(-1/x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Leur somme est donc de classe $\mathcal{C}^2$, d'où

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

- 2) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\partial_1 f(x, y) = -\frac{2}{x^3} + \frac{y}{x^2} + \frac{\exp(-1/x)}{x^2} = \frac{-2/x + y + \exp(-1/x)}{x^2},$$

et

$$\partial_2 f(x, y) = -\frac{1}{x} + y.$$

Au point critique, $\partial_2 f(x, y) = 0$ équivaut à $y = 1/x$. En remplaçant dans $\partial_1 f(x, y) = 0$, il vient

$$-\frac{1}{x} + \exp(-1/x) = 0.$$

Les deux membres sont positifs, donc cette égalité équivaut, après application du logarithme, à

$$-\frac{1}{x} = -\ln(x), \quad \text{soit} \quad \varphi(x) = 0.$$

Ainsi $x = \alpha$, puis $y = 1/\alpha$. L'unicité de α donne l'unicité du point critique :

$$A = \left(\alpha, \frac{1}{\alpha} \right), \quad y_\alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

- 3) On dérive les expressions précédentes :

$$\partial_{1,1} f(x, y) = \frac{6}{x^4} - \frac{2y}{x^3} + \exp(-1/x) \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right),$$

$$\partial_{1,2} f(x, y) = \partial_{2,1} f(x, y) = \frac{1}{x^2}, \quad \partial_{2,2} f(x, y) = 1.$$

Comme $y_\alpha = 1/\alpha$ et $\exp(-1/\alpha) = 1/\alpha$, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_{1,1} f \left(\alpha, \frac{1}{\alpha} \right) &= \frac{6}{\alpha^4} - \frac{2}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^4} - \frac{2}{\alpha^3} \right) \\ &= \frac{2}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^5} = \frac{2\alpha + 1}{\alpha^5}. \end{aligned}$$

Donc

$$\partial_{1,1} f(A) = \frac{2\alpha + 1}{\alpha^5}.$$

- 4) La matrice hessienne de f en A est la matrice symétrique réelle

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha + 1}{\alpha^5} & \frac{1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\alpha^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$h = \frac{2\alpha + 1}{\alpha^5}, \quad k = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Un calcul direct fournit les deux valeurs propres

$$\lambda_- = \frac{h+1 - \sqrt{(h-1)^2 + 4k^2}}{2}, \quad \lambda_+ = \frac{h+1 + \sqrt{(h-1)^2 + 4k^2}}{2}.$$

On a immédiatement $\lambda_+ > 0$. Par ailleurs,

$$h - k^2 = \frac{2\alpha + 1}{\alpha^5} - \frac{1}{\alpha^4} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^5} > 0.$$

Il en résulte

$$(h+1)^2 - ((h-1)^2 + 4k^2) = 4(h - k^2) > 0.$$

Comme $h+1 > 0$, on a $h+1 > \sqrt{(h-1)^2 + 4k^2}$, donc $\lambda_- > 0$. Les deux valeurs propres de la hessienne sont strictement positives. Les conditions suffisantes pour un extremum local montrent alors que

$f \text{ admet en } A = \left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right) \text{ un minimum local.}$

Exercice 3

Partie I — Cas particulier $b = n = 2$

1) L'urne contient initialement deux boules noires et deux boules blanches. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pour obtenir $X = 1$, il faut tirer une noire puis une blanche :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{4} \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Enfin, pour obtenir $X = 2$, il faut tirer les deux noires avant une blanche :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{4} \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Par conséquent,

$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{6}.$

2) La variable X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc son espérance et sa variance existent. On calcule

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

puis

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} = 1.$$

Ainsi,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

D'où

$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{5}{9}.$

- 3) Après les tirages de A , si $X = k$, il reste $2 - k$ boules noires et une boule blanche, soit $3 - k$ boules. Les événements $([X = k])_{0 \leq k \leq 2}$ forment un système complet d'événements. Les formules des probabilités totales donnent

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 0) &= \sum_{k=0}^2 \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = 0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{2}.$$

- 4) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Si $X = 0$, l'urne de B contient deux boules noires et une blanche. L'événement $[Y = i]$ correspond à i tirages noirs puis un tirage blanc. Par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = i]) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^i \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^i.$$

De même, si $X = 1$, l'urne contient une noire et une blanche, donc

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = i]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{2} = \frac{1}{3 \cdot 2^{i+1}}.$$

Si $X = 2$, il ne reste aucune boule noire, donc $Y = 0$. Finalement,

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = i]) &= \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^i, \\ \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = i]) &= \frac{1}{3 \cdot 2^{i+1}}, \\ \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = i]) &= 0.\end{aligned}}$$

- 5) Pour $i \geq 1$, les événements $([X = k])_{0 \leq k \leq 2}$ forment un système complet d'événements. Les formules des probabilités totales et la question précédente donnent

$$\mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{3 \cdot 2^{i+1}}.$$

Avec la question 3,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{2}, \quad \forall i \geq 1, \quad \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{3 \cdot 2^{i+1}}.}$$

Vérifions directement la somme. Les deux séries géométriques convergent, et

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = i) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{2/3}{1 - 2/3} + \frac{1}{3} \frac{(1/2)^2}{1 - 1/2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = i) = 1.}$$

6) D'après la loi obtenue,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

Pour $q \in [0, 1[$, la série $\sum_{i \geq 1} i q^i$ converge et vaut $q/(1-q)^2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{6} \frac{2/3}{(1-2/3)^2} + \frac{1}{6} \frac{1/2}{(1-1/2)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

La série définissant l'espérance converge donc, et

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{4}{3}.}$$

Partie II — Retour au cas général

1) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'événement $[X = k]$ correspond à k tirages noirs successifs, puis à un tirage blanc. La formule des probabilités composées donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \frac{n}{n+b} \frac{n-1}{n+b-1} \cdots \frac{n-k+1}{n+b-k+1} \frac{b}{n+b-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \frac{b(n+b-k-1)!}{(n+b)!}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} = \frac{(n-k+b-1)!}{(b-1)!(n-k)!} \frac{b!n!}{(n+b)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{b(n+b-k-1)!}{(n+b)!}.$$

La même formule est aussi valable pour $k = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}.}$$

2) En sommant les probabilités de la loi de X ,

$$1 = \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{k=0}^n \binom{n-k+b-1}{b-1}.$$

Avec le changement d'indice $j = n - k$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k+b-1}{b-1} = \sum_{j=0}^n \binom{j+b-1}{b-1}.$$

Il vient donc

$$\boxed{\sum_{j=0}^n \binom{j+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}.}$$

En remplaçant n par N et $b-1$ par a , on obtient

$$\boxed{\forall N, a \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^N \binom{k+a}{a} = \binom{N+a+1}{a+1}.}$$

3) Pour $k \geq 1$,

$$k \binom{k+a}{a} = k \frac{(k+a)!}{a! k!} = \frac{(k+a)!}{a! (k-1)!},$$

$$(a+1) \binom{k+a}{a+1} = (a+1) \frac{(k+a)!}{(a+1)! (k-1)!} = \frac{(k+a)!}{a! (k-1)!}.$$

Ainsi,

$$k \binom{k+a}{a} = (a+1) \binom{k+a}{a+1}.$$

La présence de $\binom{k+1}{a+1}$ dans une version de l'énoncé est une coquille ; l'égalité correcte est celle ci-dessus.

En sommant pour k de 1 à N , puis en posant $j = k - 1$,

$$\sum_{k=0}^N k \binom{k+a}{a} = (a+1) \sum_{k=1}^N \binom{k+a}{a+1}$$

$$= (a+1) \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+a+1}{a+1}.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^N k \binom{k+a}{a} = (a+1) \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+a+1}{a+1}}.$$

4) Posons $J = n - X$. Pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la question 1 donne

$$\mathbb{P}(J = j) = \mathbb{P}(X = n - j) = \frac{\binom{j+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(J) = \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{j=0}^n j \binom{j+b-1}{b-1}.$$

La question précédente, appliquée avec $N = n$ et $a = b - 1$, donne

$$\sum_{j=0}^n j \binom{j+b-1}{b-1} = b \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j+b}{b}.$$

Puis la formule (S) donne

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{j+b}{b} = \binom{n+b}{b+1}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(n - X) = b \frac{\binom{n+b}{b+1}}{\binom{n+b}{b}} = b \frac{n}{b+1} = \frac{nb}{b+1}.$$

Enfin, $\mathbb{E}(n - X) = n - \mathbb{E}(X)$, donc

$$\boxed{\mathbb{E}(n - X) = \frac{nb}{b+1}, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{n}{b+1}}.$$

- 5) Soient $k \in X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $i \in \mathbb{N}^*$. Après les tirages de A , il reste $n - k$ boules noires et $b - 1$ boules blanches, soit $n + b - k - 1$ boules. Conditionnellement à $[X = k]$, obtenir $Y = i$ signifie tirer i fois une boule noire, avec remise, puis une boule blanche. Ainsi,

$$\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = i) = \left(\frac{n - k}{n + b - k - 1} \right)^i \frac{b - 1}{n + b - k - 1}.$$

En utilisant la formule des probabilités composées et la loi de X ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = i]) &= \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} \\ &\quad \times \left(\frac{n - k}{n + b - k - 1} \right)^i \frac{b - 1}{n + b - k - 1}. \end{aligned}$$

- 6) Posons

$$q_k = \frac{n - k}{n + b - k - 1}.$$

Comme $k \leq n$ et $b \geq 2$, on a $0 \leq q_k < 1$. La série $\sum_{i \geq 1} i q_k^{i-1}$ converge. En dérivant l'égalité finie

$$\sum_{i=0}^m q^i = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

par rapport à q , puis en faisant tendre m vers $+\infty$ pour $q \in [0, 1[$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i q^{i-1} = \frac{1}{(1 - q)^2}.$$

Or

$$1 - q_k = \frac{b - 1}{n + b - k - 1}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{n - k}{n + b - k - 1} \right)^{i-1} = \frac{(n + b - k - 1)^2}{(b - 1)^2}.$$

- 7) Tous les termes considérés sont positifs. En utilisant la loi conjointe établie à la question 5 et la somme de la question 6,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^{+\infty} i \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = i]) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \frac{b - 1}{n + b - k - 1} \frac{n - k}{n + b - k - 1} \\ &\quad \times \frac{(n + b - k - 1)^2}{(b - 1)^2} \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \frac{n - k}{b - 1} \\ &= \frac{\mathbb{E}(n - X)}{b - 1}. \end{aligned}$$

La question 4 fournit $\mathbb{E}(n - X) = nb/(b + 1)$, donc la série définissant l'espérance converge et

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{b - 1} \frac{nb}{b + 1} = \frac{bn}{b^2 - 1}.$$