

Corrigé Ecricome 2014

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	4
Exercice 3	6

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2014.

Exercice 1

Partie I – Réduction de la matrice A

1) Soit $X = {}^t(x, y, z) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. L'égalité $AX = 0$ équivaut à

$$\begin{cases} x = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - 2y - z = 0. \end{cases}$$

Après substitution de $x = 0$, les deux dernières équations sont équivalentes à $z = -2y$. Ainsi

$$\text{Ker}(A) = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les colonnes de A sont

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}C_2.$$

Les matrices colonnes C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles : elles sont donc libres. Par définition de l'image,

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect}(u) \quad \text{et} \quad \text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

2) Le noyau de A contient le vecteur non nul u , donc A n'est pas inversible. Or une matrice est non inversible si et seulement si son noyau n'est pas réduit à la matrice colonne nulle. Comme $Au = 0u$,

$$A \text{ n'est pas inversible et } 0 \text{ est une valeur propre de } A.$$

3) On calcule directement

$$Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - 2 \\ -2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0u$$

et

$$Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - 1 \\ -2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v.$$

Ainsi, u et v , qui sont non nuls, sont des vecteurs propres associés respectivement à 0 et 1.

D'après la question 1, $E_0(A) = \text{Ker}(A) = \text{Vect}(u)$, donc $\dim E_0(A) = 1$. Pour déterminer $E_1(A)$, résolvons $AX = X$:

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ x + y + z = 0, \\ 2x - 2y - 2z = 0. \end{cases}$$

En posant $s = y + z$, les deux dernières équations donnent $x + s = 0$ et $x - s = 0$, donc $x = s = 0$. Par suite $z = -y$, et

$$\boxed{\begin{array}{lll} \lambda = 0, & E_0(A) = \text{Vect}(u), & \dim E_0(A) = 1, \\ \mu = 1, & E_1(A) = \text{Vect}(v), & \dim E_1(A) = 1. \end{array}}$$

- 4) Déterminons d'abord les valeurs propres possibles en résolvant directement le système associé. Soit α une valeur propre et $X = {}^t(x, y, z)$ un vecteur propre associé. La première ligne de $AX = \alpha X$ donne

$$(1 - \alpha)x = 0.$$

Si $\alpha = 1$, la question précédente donne $X \in \text{Vect}(v)$. Si $\alpha \neq 1$, alors $x = 0$, et les deux autres lignes donnent

$$2y + z = \alpha y, \quad -2y - z = \alpha z.$$

En additionnant, on obtient $\alpha(y + z) = 0$. Si $\alpha \neq 0$, alors $z = -y$, puis la première des deux égalités impose $\alpha = 1$, ce qui est exclu. Ainsi, les seules valeurs propres sont 0 et 1.

Une base de diagonalisation devrait comporter trois matrices colonnes propres. Or les vecteurs propres associés à 0 sont tous colinéaires à u , et ceux associés à 1 sont tous colinéaires à v . On ne peut donc obtenir que deux matrices colonnes propres libres. Ainsi,

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

- 5) L'égalité $At = t + v$, avec $t = {}^t(x, y, z)$, équivaut à

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ x + y + z = 1, \\ 2x - 2y - 2z = -1. \end{cases}$$

Posons $s = y + z$. Nous obtenons

$$x + s = 1, \quad x - s = -\frac{1}{2}.$$

En ajoutant puis en soustrayant ces deux égalités,

$$x = \frac{1}{4}, \quad s = \frac{3}{4}.$$

Le réel y est libre et $z = 3/4 - y$. Par conséquent,

$$\boxed{\{t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : At = t + v\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ r \\ \frac{3}{4} - r \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 6) La question précédente fournit, en imposant une troisième coordonnée nulle,

$$w = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifions que $C = (u, v, w)$ est une base. Si $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, la première coordonnée donne $\gamma/4 = 0$, donc $\gamma = 0$. Les deux dernières coordonnées donnent alors

$$\alpha + \beta = 0, \quad -2\alpha - \beta = 0.$$

Il en résulte $\alpha = \beta = 0$. La famille de trois matrices colonnes est libre dans un espace de dimension 3, donc c'est une base.

Enfin, $Au = 0$, $Av = v$ et, par construction, $Aw = v + w$. Les colonnes de AP sont donc les mêmes que celles de PT , d'où $AP = PT$. Comme P est inversible, on peut multiplier à gauche par P^{-1} :

$$w = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (u, v, w) \text{ est une base,} \quad P^{-1}AP = T.$$

Partie II – Résolution d'une équation matricielle

1) Puisque $N^2 = T$,

$$TN = N^2N = N^3 = NN^2 = NT.$$

Or $Te_1 = 0$ et $Te_2 = e_2$. La relation de commutation donne

$$T(Ne_1) = N(Te_1) = 0, \quad T(Ne_2) = N(Te_2) = Ne_2.$$

Ainsi,

$$TN = NT, \quad T(Ne_1) = 0, \quad T(Ne_2) = Ne_2.$$

2) Résolvons d'abord $TX = 0$, avec $X = {}^t(x, y, z)$. On a

$$TX = \begin{pmatrix} 0 \\ y + z \\ z \end{pmatrix},$$

donc $TX = 0$ équivaut à $y = z = 0$. Ainsi $\text{Ker}(T) = \text{Vect}(e_1)$.

De même, $TX = X$ équivaut à

$$x = 0, \quad y + z = y, \quad z = z,$$

donc $x = z = 0$, et $E_1(T) = \text{Vect}(e_2)$. En utilisant la question 1,

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad Ne_1 = ae_1 \quad \text{et} \quad Ne_2 = be_2.$$

3) Les deux premières colonnes de N sont ae_1 et be_2 . Écrivons la troisième colonne sous la forme ${}^t(c, d, e)$. Nous obtenons donc

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5.$$

4) Pour une matrice de la forme précédente,

$$N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & c(a+e) \\ 0 & b^2 & d(b+e) \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

L'égalité $N^2 = T$ est donc équivalente au système

$$a^2 = 0, \quad b^2 = 1, \quad e^2 = 1, \quad c(a+e) = 0, \quad d(b+e) = 1.$$

On obtient $a = 0$, puis $e \neq 0$, donc $c = 0$. La dernière égalité impose $b + e \neq 0$. Puisque $b, e \in \{-1, 1\}$, ils ont le même signe. Deux possibilités subsistent :

$$(b, e, d) = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad (b, e, d) = \left(-1, -1, -\frac{1}{2}\right).$$

Un calcul direct confirme que les deux matrices obtenues ont pour carré T . Finalement,

$$N^2 = T \iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

- 1) On a $f(0) = 1 > 0$. Si $x > 0$, alors $1 + x > 1$, donc $\ln(1 + x) > 0$, et ainsi $f(x) > 0$. La fonction f est donc à valeurs dans $]0, +\infty[$, qui est inclus dans son ensemble de définition. Comme $u_0 = e$ existe, une récurrence assure alors que chaque $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. Ainsi,

$$\forall x \geq 0, f(x) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n > 0.$$

- 2) `import numpy as np`

```
def terme(N):
    u = np.e
    for k in range(N):
        u = u/np.log(1+u)
    return u
```

- 3) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Au voisinage de 0, la formule de Taylor–Young à l'ordre 2 donne

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right).$$

Ainsi, lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} \longrightarrow 1 = f(0).$$

La continuité à droite en 0 complète l'étude :

$$f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.$$

- 4) Sur $]0, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(1 + x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, et le dénominateur ne s'annule pas. Leur quotient est donc de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$f'(x) = \frac{\ln(1 + x) - x/(1 + x)}{(\ln(1 + x))^2}.$$

Par conséquent,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{\ln(1 + x) - \frac{x}{1+x}}{(\ln(1 + x))^2}, \quad f \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[).$$

5) La formule de Taylor–Young à l’ordre 2 donne

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Appliquée à $h(x) = (1+x)^{-1}$, elle donne

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2),$$

donc, après multiplication par x ,

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2).$$

Par différence,

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

En outre, $\ln(1+x) \sim x$, donc

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{(\ln(1+x))^2} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2}.}$$

6) Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}.$$

Or, par la formule obtenue à la question 3,

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad x \ln(1+x) \sim x^2.$$

Le taux d’accroissement admet donc pour limite $1/2$. Ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'(0) = 1/2$. D’après la question précédente, $f'(x) \rightarrow 1/2 = f'(0)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Par conséquent,

$$\boxed{f'(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[.}$$

7) Soit $x \geq e - 1$. Alors $1+x \geq e$, donc $\ln(1+x) \geq 1$. Comme $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \leq x.$$

Par ailleurs,

$$(x+1) \ln(x+1) \geq x+1.$$

Enfin $x/(1+x) < 1$, donc

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \geq 1 - \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+x} > 0.$$

Le dénominateur de l’expression de $f'(x)$ étant positif,

$$\boxed{\forall x \geq e-1, \quad f(x) \leq x, \quad (x+1) \ln(x+1) \geq x+1, \quad f'(x) \geq 0.}$$

- 8) Procédons par récurrence. On a $u_0 = e \geq e - 1$. Supposons $u_n \geq e - 1$. D'après la question 7, f est croissante sur $[e - 1, +\infty[$, donc

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(e - 1) = \frac{e - 1}{\ln(e)} = e - 1.$$

La propriété est initialisée et héréditaire. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e - 1.}$$

- 9) Pour tout n , la question 8 donne $u_n \geq e - 1$, puis la question 7 donne

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n.$$

La suite (u_n) est décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $L \geq e - 1 > 0$. La continuité de f permet de passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$L = f(L) = \frac{L}{\ln(1 + L)}.$$

Comme $L > 0$, on simplifie par L et l'on obtient $\ln(1 + L) = 1$, soit $L = e - 1$. Finalement,

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante, minorée et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e - 1.}$$

Exercice 3

Partie I – Étude d'une première expérience

- 1) a) `import numpy.random as rd`

```
def lancer(p):
    x = rd.random()
    if x < p:
        return 1
    else:
        return 0
```

```
b) def premier_pile(p):
    n = 1
    while lancer(p) == 0:
        n = n+1
    return n
```

- c) Les deux appels simulent deux temps d'attente successifs. En retirant les deux lancers donnant PILE, on obtient le nombre total de FACE.

```
def second_pile(p):
    return premier_pile(p)+premier_pile(p)-2
```

- 2) Les n lancers sont indépendants, chacun donnant PILE avec probabilité p . Ainsi, X_n compte le nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Les formules de la loi binomiale donnent

$$\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p), \quad \mathbb{E}(X_n) = np, \quad \mathbb{V}(X_n) = npq.}$$

- 3) Le second PILE peut apparaître immédiatement, auquel cas $Y = 0$. Il peut également être précédé de n'importe quel nombre entier positif de FACE. Toutes ces valeurs sont possibles, car $p > 0$ et $q > 0$. Donc

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}.$$

- 4) L'événement $[Y = 0]$ correspond à la succession PILE, PILE, donc

$$\mathbb{P}(Y = 0) = p^2.$$

Pour $Y = 1$, le seul FACE peut occuper l'une des deux premières places, et le dernier lancer est PILE. Les deux suites possibles ont chacune la probabilité p^2q , d'où

$$\mathbb{P}(Y = 1) = 2p^2q.$$

Pour $Y = 2$, parmi les trois premiers lancers, un seul est PILE, et le quatrième est PILE. Il y a trois choix pour la place du premier PILE, donc

$$\mathbb{P}(Y = 0) = p^2, \quad \mathbb{P}(Y = 1) = 2p^2q, \quad \mathbb{P}(Y = 2) = 3p^2q^2.$$

- 5) L'événement $[Y = n]$ signifie que le second PILE est obtenu au $(n + 2)$ -ième lancer, et que les $n + 1$ premiers lancers comportent exactement un PILE. Le second PILE impose que le $(n + 2)$ -ième lancer ne soit pas FACE, c'est-à-dire que $\overline{F_{n+2}}$ soit réalisé. Ainsi,

$$[Y = n] = [X_{n+1} = 1] \cap \overline{F_{n+2}}.$$

- 6) Les événements $[X_{n+1} = 1]$ et $\overline{F_{n+2}}$ concernent des lancers distincts, donc ils sont indépendants. De plus,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \binom{n+1}{1} pq^n = (n+1)pq^n$$

et $\mathbb{P}(\overline{F_{n+2}}) = p$. La question précédente donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = n) = (n+1)p^2q^n.$$

- 7) Pour $N \in \mathbb{N}$, partons de l'identité géométrique finie

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

En dérivant cette égalité polynomiale, puis en multipliant par q et en ajoutant l'égalité initiale, on obtient

$$\sum_{n=0}^N (n+1)q^n = \frac{1 - (N+2)q^{N+1} + (N+1)q^{N+2}}{(1-q)^2}.$$

Comme $0 < q < 1$, les croissances comparées donnent $Nq^N \rightarrow 0$. En faisant tendre N vers $+\infty$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = 1.$$

8) D'après la loi de Y ,

$$\mathbb{E}(Y) = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)q^n,$$

sous réserve de convergence. En dérivant deux fois l'égalité géométrique finie, puis en combinant sa première et sa seconde dérivée, on obtient, après passage à la limite,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)q^n &= q^2 \frac{2}{(1-q)^3} + 2q \frac{1}{(1-q)^2} \\ &= \frac{2q(q + (1-q))}{(1-q)^3} = \frac{2q}{(1-q)^3}. \end{aligned}$$

Les termes de reste tendent vers 0 par croissances comparées. La série qui définit l'espérance converge donc, et

$$\mathbb{E}(Y) = p^2 \frac{2q}{(1-q)^3} = p^2 \frac{2q}{p^3}.$$

Par conséquent,

$$Y \text{ possède une espérance et } \mathbb{E}(Y) = \frac{2q}{p}.$$

9) L'événement $[Y_k = n]$ signifie que le $(n+k)$ -ième lancer donne le k -ième PILE. Le dernier lancer est donc PILE. Parmi les $n+k-1$ premiers lancers, il faut placer exactement $k-1$ PILE et n FACE. Il y a $\binom{n+k-1}{k-1}$ choix possibles. Chacune des suites ainsi obtenues a pour probabilité $p^k q^n$. Ainsi,

$$Y_k(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_k = n) = \binom{n+k-1}{k-1} p^k q^n.$$

Partie II – Étude d'une seconde expérience

1) Puisque R suit la loi uniforme sur $[0, 1]$,

$$F_R(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

Comme $S = 1 - R$, pour $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F_S(t) &= \mathbb{P}(S \leq t) = \mathbb{P}(1 - R \leq t) \\ &= \mathbb{P}(R \geq 1 - t) = 1 - F_R(1 - t) = t. \end{aligned}$$

Pour $t < 0$, cette probabilité vaut 0, et pour $t > 1$, elle vaut 1. Ainsi,

$$F_R(t) = F_S(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1, \end{cases} \quad S \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]).$$

2) Par définition de T ,

$$[T \leq t] = [\max(R, S) \leq t] = [R \leq t] \cap [S \leq t].$$

Or $S = 1 - R$, donc

$$[S \leq t] = [1 - R \leq t] = [R \geq 1 - t].$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}([R \leq t] \cap [R \geq 1 - t]).}$$

3) Soit $t \in [1/2, 1]$. Alors $0 \leq 1 - t \leq t \leq 1$, et la question précédente donne

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \mathbb{P}(1 - t \leq R \leq t) \\ &= F_R(t) - F_R(1 - t) = t - (1 - t) = 2t - 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad F_T(t) = 2t - 1.}$$

4) Comme $R + S = 1$, au moins l'une des deux durées est supérieure ou égale à $1/2$, donc $T \geq 1/2$. De plus $R, S \leq 1$, donc $T \leq 1$. Par conséquent,

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{2}, \\ 2t - 1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

Or, sur $[1/2, 1]$,

$$2t - 1 = \frac{t - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}},$$

ce qui est la fonction de répartition de la loi uniforme sur ce segment. Donc

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right).}$$

5) Pour une variable suivant la loi uniforme sur $[a, b]$,

$$\mathbb{E}(T) = \frac{a + b}{2}, \quad \mathbb{V}(T) = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Avec $a = 1/2$ et $b = 1$, on obtient

$$\mathbb{E}(T) = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{V}(T) = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{12} = \frac{1}{48}.$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{V}(T) = \frac{1}{48}.}$$