

MATHEMATIQUES E (épreuve n° 289)

ANNEE 2014

Epreuve conçue par H E C Paris
Voie économique et commerciale

Le sujet

Dans le sujet de cette année, les trois principales composantes du programme étaient représentées (algèbre, analyse, probabilités). L'épreuve était composée d'un exercice d'algèbre linéaire et d'un problème à dominante probabiliste et analytique qui comprenait en outre une question d'algorithmique : écriture d'une fonction Pascal renvoyant une médiane d'une variable aléatoire discrète finie.

L'exercice avait pour thème les matrices « magiques » d'ordre 3 et se proposait de montrer que toute matrice « magique » s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice du noyau d'une certaine application linéaire et d'une matrice de $\text{Vect}(J)$, où J désigne la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les éléments sont égaux à 1.

Le problème comportait trois parties largement indépendantes.

La partie I avait pour objet la mise en évidence d'un équivalent d'une intégrale en faisant appel à des techniques analytiques (étude de fonctions, encadrements) et des résultats probabilistes concernant la loi normale centrée réduite.

Dans la partie II, on étudiait quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson qui permettaient, en association avec le résultat de la partie I, de déterminer l'équivalent classique de Sterling de $n !$.

Enfin, dans la partie III, on définissait la notion de médiane d'une variable aléatoire réelle X admettant une espérance et on montrait dans le cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité que l'espérance $E(|X-x|)$ est minimisée lorsque x est une médiane de X .

Les résultats statistiques

L'exercice et le problème comptaient respectivement pour 17% et 83% des points du barème. Plus précisément, les parties I, II et III du problème comptaient respectivement pour 28%, 32% et 23% des points du barème.

Sur les 2053 candidats ayant composé dans cette épreuve, la note moyenne est de 9,37 avec un écart-type de 4,26.

Les résultats par école sont les suivants :

- HEC (1587 candidats) – moyenne : 10,03 ; écart-type : 4,26.
- ESCP Europe (1919 candidats) – moyenne : 9,67 ; écart-type : 4,14.

Près de 8%, soit 162 candidats, obtiennent une note supérieure à 16 et 18 candidats se voient attribuer la note maximale de 20. La note médiane est de 9.3 et les premier et troisième quartiles sont égaux à 6,5 et 12,1 respectivement.

Pour obtenir la note de 20, il fallait résoudre correctement l'équivalent d'au moins 60% des points du barème, par exemple, les questions 1.a), 2.a), 2.b) et 3.a) de l'exercice d'une part et d'autre part, toute la partie I et les questions 5, 6.a), 7.a), 7.b), 7.c), 8.a) et 8.b) du problème.

Commentaires

Les remarques générales qui ressortent de la correction des copies sont peu ou prou celles qui ont été relevées dans les rapports des concours précédents.

Si la rédaction est moins désinvolte que par le passé, la présentation laisse beaucoup à désirer : omission de la numérotation des questions, fautes d'orthographe innombrables même dans les termes mathématiques, copies pleines de ratures et à la limite de la lisibilité (écriture anarchique, non-respect des lignes horizontales), absence de résultats encadrés, va-et-vient entre différentes questions des différentes parties.

Le jury rappelle que toute tentative de « bluff » ou de tricherie a une incidence négative sur la note finale de son auteur.

Signalons enfin les erreurs les plus fréquentes constatées par les correcteurs.

Exercice

Les correcteurs sont unanimes pour relever une très grande faiblesse des candidats en algèbre linéaire certainement due à une absence de pratique.

Ainsi, on observe des confusions d'objets mathématiques (« un sous-espace vectoriel est un élément d'un espace vectoriel »), des confusions entre « trace nulle et nullité de tous les coefficients de la diagonale principale », une incompréhension de la notion de rang d'une application linéaire et par voie de conséquence, une méconnaissance du théorème du rang.

La question 2.b) de la matrice de f dans deux bases a souvent été interprétée comme la demande de deux matrices, une pour chaque base !!

Problème

Dans la question 1.a), on confond souvent une fonction de classe C^1 avec une fonction continue et dérivable.

La question 1.b) est résolue principalement par l'étude d'une fonction auxiliaire sans remarquer la concavité de la fonction $\ln$.

Les calculs de dérivées de la question 1.c) sont particulièrement mal traités et le lien avec le résultat de la question précédente est rarement exploité.

Un motif de satisfaction avec la question 2.a) dans laquelle le bon développement limité de $\ln(1-x)$ est donné par deux tiers des candidats environ.

On trouve dans la question 3.a) des maladroites de rédaction et rares sont les candidats qui parviennent à conclure que l'intégrale considérée est faussement impropre.

L'encadrement de la question 4.a) est souvent prouvé par récurrence...

Beaucoup de candidats croient que la limite de la suite définie par $w_n = f(u_n)$ vérifie $l = f(l)$.

La convergence est souvent prouvée par « décroissance minorée » alors que la continuité de f donne immédiatement le résultat.

La question 5.d) est rarement menée à son terme même si le problème de convergence est mieux traité que le calcul. Certains candidats se resservent à juste titre des résultats de la question 5.c).

Dans la question 6.a), l'indépendance est citée dans moins de la moitié des copies pour justifier la loi de la somme de variables aléatoires suivant une loi de Poisson. Très souvent, la réponse donnée est une « loi normale centrée réduite ».

L'énoncé du « théorème de la limite centrée » de la question 8.a) manque dans la quasi-totalité des copies de précision et de rigueur : fréquemment, on oublie les hypothèses ou bien, on conclut que S_n^* suit une loi normale centrée réduite.

La question de Pascal 9 est très rarement abordée et mal résolue.

Enfin, on trouve très souvent dans la question 10.a) : $E(|X-r|) = E(X-r) + E(r-X)$.

Le reste du problème n'a été abordé qu'exceptionnellement.