

Corrigé Ecricome 2015

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Partie I – Une loi exponentielle et une suite	1
Partie II – Une fonction et une variable aléatoire à densité	3
Exercice 2	6
Partie I – Premiers résultats	6
Partie II – Un exemple	6
Partie III – Autres résultats	7
Exercice 3	9
Partie I – Une première expérience aléatoire	9
Partie II – Une deuxième expérience aléatoire	10
Partie III – Une troisième expérience aléatoire	10

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2015.

Exercice 1

Partie I – Une loi exponentielle et une suite

1) Une loi exponentielle

a) Puisque X suit la loi exponentielle de paramètre 1, une densité de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Les formules de cette loi donnent $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{V}(X) = 1$. Ainsi,

$$f_X(x) = e^{-x} \text{ pour } x \geq 0, \quad f_X(x) = 0 \text{ pour } x < 0, \quad \mathbb{E}(X) = 1, \quad \mathbb{V}(X) = 1.$$

b) Pour $x < 0$, la variable X étant à valeurs positives,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0.$$

Pour $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur le segment $[0, x]$, donc

$$F_X(x) = \int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Par conséquent,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

2) Étude d'une suite

a) Posons $h(x) = e^x - x - 1$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$h'(x) = e^x - 1.$$

Si $x < 0$, alors $h'(x) < 0$; si $x > 0$, alors $h'(x) > 0$. Ainsi, h décroît sur $] -\infty, 0]$, puis croît sur $[0, +\infty[$. Elle atteint donc son minimum en 0, et $h(0) = 0$. De plus, la stricte monotonie de h de part et d'autre de 0 montre que ce minimum n'est atteint qu'en 0. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1, \quad e^x = x + 1 \iff x = 0.$$

b) Montrons par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$. L'initialisation est immédiate puisque $u_1 = 1 > 0$. Supposons $u_n > 0$. Alors $e^{-u_n} < 1$ et

$$u_{n+1} = F(u_n) = 1 - e^{-u_n} > 0.$$

La propriété est héréditaire. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.$$

c) Le terme suivant s'obtient en appliquant $x \mapsto 1 - e^{-x}$ au terme courant.

```
U = np.zeros(100)
U[0] = 1
for n in range(99):
    U[n+1] = 1 - np.exp(-U[n])
plt.plot(np.arange(1, 101), U, "+")
plt.show()
```

- d) Le nuage de points suggère que les termes restent positifs, décroissent et se rapprochent de 0. On conjecture donc

$$(u_n)_{n \geq 1} \text{ est décroissante et converge vers } 0.$$

- e) Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n > 0$. En appliquant la question 2(a) à $-u_n \neq 0$, on obtient l'inégalité stricte

$$e^{-u_n} > 1 - u_n.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} < u_n.$$

Ainsi,

$$(u_n)_{n \geq 1} \text{ est strictement décroissante.}$$

- f) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Le théorème de la limite monotone assure donc qu'elle converge vers un réel $\ell \geq 0$. La fonction $x \mapsto 1 - e^{-x}$ étant continue, la relation $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$ donne, en passant à la limite,

$$\ell = 1 - e^{-\ell}.$$

Si $\ell > 0$, la question 2(a), appliquée à $-\ell \neq 0$, donne $e^{-\ell} > 1 - \ell$, ce qui contredit l'égalité précédente. Il reste donc $\ell = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

- g) La question 2(a), appliquée à u_n , donne

$$e^{u_n} \geq 1 + u_n.$$

Les deux membres sont strictement positifs ; en prenant leurs inverses,

$$e^{-u_n} \leq \frac{1}{1 + u_n}.$$

Il vient alors

$$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} \geq 1 - \frac{1}{1 + u_n} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

Comme u_{n+1} et u_n sont strictement positifs,

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1 + u_n}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

Donc

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1 + u_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n}.$$

- h) Montrons par récurrence que $u_n \geq 1/n$. Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$. Supposons $u_n \geq 1/n$, soit $1/u_n \leq n$. La question précédente donne

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \leq n + 1.$$

Comme $u_{n+1} > 0$, on en déduit $u_{n+1} \geq 1/(n + 1)$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \frac{1}{n}.$$

i) Pour chaque $n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$, la n -ième coordonnée de $\mathbf{S}$ vaut

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

Le vecteur-ligne $\mathbf{S}$ contient donc les cent premières sommes partielles de la série de terme général u_n . Leur croissance persistante conduit à conjecturer que cette série diverge. Ainsi,

$$\mathbf{S} \text{ contient les sommes partielles et } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ semble diverger.}$$

j) D'après la question 2(h), pour tout $n \geq 1$,

$$u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0.$$

Or la série harmonique $\sum_{n \geq 1} 1/n$ diverge. Le critère de comparaison donne alors

$$\sum_{n \geq 1} u_n \text{ diverge.}$$

Partie II – Une fonction et une variable aléatoire à densité

1) Étude de la fonction g

a) Sur $] -\infty, 0[$, la fonction g est constante, donc dérivable, et $g'(x) = 0$. Sur $]0, +\infty[$, elle est dérivable comme produit de fonctions dérivables, avec

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

En outre,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 = g(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-x} = 0 = g(0),$$

donc g est continue en 0. En revanche, les taux d'accroissement à gauche et à droite vérifient

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1.$$

Ils ont des limites différentes. Ainsi,

$$g \text{ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.}$$

b) Pour $x > 0$, $e^{-x} > 0$, donc $g'(x)$ a le signe de $1-x$. De plus, les croissances comparées donnent $xe^{-x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, et $g(1) = e^{-1}$. Le tableau de variations sur $[0, +\infty[$ est donc

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$\nearrow e^{-1} \searrow$	0

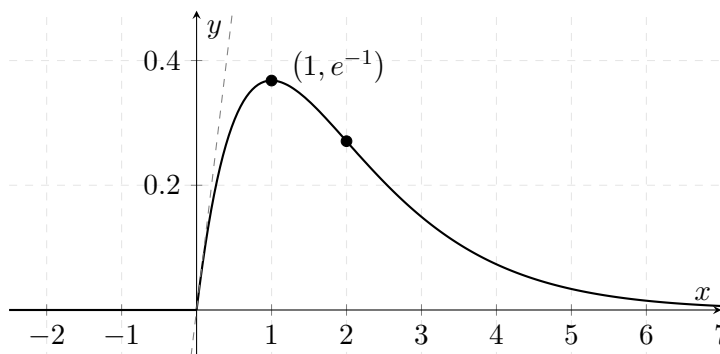
c) Pour $x > 0$,

$$g''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}.$$

Ainsi, $g''(x) < 0$ sur $]0, 2[$ et $g''(x) > 0$ sur $]2, +\infty[$. Par conséquent,

$$g \text{ est concave sur } [0, 2] \text{ et convexe sur } [2, +\infty[, \text{ avec un point d'inflexion en } x = 2.$$

- d) Sur $] -\infty, 0]$, la courbe est confondue avec l'axe des abscisses. En 0, elle possède une demi-tangente horizontale à gauche et une demi-tangente de pente 1 à droite. Elle croît ensuite jusqu'au point $(1, e^{-1})$, puis décroît vers 0. Son changement de convexité se produit au point d'abscisse 2.



La courbe présente en 0 les deux demi-tangentes $y = 0$ et $y = x$.

2) Étude de variables aléatoires

- a) La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$. Pour $A > 0$, effectuons une intégration par parties sur $[0, A]$ avec $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment et

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = -e^{-x}.$$

Ainsi,

$$\int_0^A x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^A + \int_0^A e^{-x} dx = 1 - (A+1)e^{-A}.$$

Les croissances comparées donnent $(A+1)e^{-A} \rightarrow 0$, donc

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

Les trois conditions usuelles étant vérifiées,

g est une densité de probabilité.

- b) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, sa primitive G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G' = g$. Puisque g est continue, G' l'est également. Donc

G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- c) Pour $x < 0$, Y est à valeurs positives, donc $G(x) = 0$. Pour $x \geq 0$,

$$G(x) = \int_0^x t e^{-t} dt.$$

On applique une intégration par parties sur $[0, x]$ avec $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$. Les fonctions u et $v(t) = -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment, avec $u'(t) = 1$. Il vient

$$\begin{aligned} G(x) &= [-t e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= -x e^{-x} + 1 - e^{-x} = 1 - (1+x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - (1+x)e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

d) Pour $A > 0$,

$$\int_0^A xg(x) dx = \int_0^A x^2 e^{-x} dx.$$

On effectue une intégration par parties sur $[0, A]$ avec $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{-x}$. Les fonctions u et $v(x) = -e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, et $u'(x) = 2x$. Ainsi,

$$\int_0^A x^2 e^{-x} dx = -A^2 e^{-A} + 2 \int_0^A x e^{-x} dx.$$

D'après le calcul de la question 2(a),

$$\int_0^A x^2 e^{-x} dx = 2 - (A^2 + 2A + 2)e^{-A}.$$

Les croissances comparées montrent que le dernier terme tend vers 0. L'espérance de Y existe et

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 2.}$$

3) On pose $Z = e^Y$.

a) Comme $Y \geq 0$, on a $Z \geq 1$. Si $z < 1$, alors $H(z) = 0$. Si $z \geq 1$, la fonction exponentielle étant strictement croissante,

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(e^Y \leq z) = \mathbb{P}(Y \leq \ln z) \\ &= G(\ln z) = 1 - e^{-\ln z}(1 + \ln z) = 1 - \frac{1 + \ln z}{z}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{H(z) = \begin{cases} 0, & z < 1, \\ 1 - \frac{1 + \ln z}{z}, & z \geq 1. \end{cases}}$$

b) On dérive la fonction de répartition là où elle est dérivable. Pour $z < 1$, $H'(z) = 0$. Pour $z > 1$,

$$H'(z) = -\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1 + \ln z}{z^2}\right) = \frac{\ln z}{z^2}.$$

Ainsi, une densité de Z est

$$\boxed{f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 1, \\ \frac{\ln z}{z^2}, & z \geq 1. \end{cases}}$$

c) Pour $A > 1$,

$$\int_1^A z f_Z(z) dz = \int_1^A \frac{\ln z}{z} dz = \left[\frac{(\ln z)^2}{2} \right]_1^A = \frac{(\ln A)^2}{2}.$$

Cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque $A \rightarrow +\infty$. Par conséquent,

$$\boxed{Z \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

Exercice 2

Partie I – Premiers résultats

- 1) Soient $M, M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\varphi_A(\alpha M + \beta M') = A(\alpha M + \beta M') = \alpha AM + \beta AM' = \alpha \varphi_A(M) + \beta \varphi_A(M').$$

L'application φ_A est donc linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même. Ainsi,

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

- 2) Si φ_A est bijective, la matrice I_2 possède un unique antécédent $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par définition de φ_A , celui-ci vérifie $AN = I_2$. Donc

$$\boxed{\exists! N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad AN = I_2.}$$

- 3) Supposons que φ_A soit un automorphisme. D'après la question précédente, il existe N tel que $AN = I_2$. Or

$$\varphi_A(NA) = ANA = A = \varphi_A(I_2).$$

L'application φ_A étant injective, on obtient $NA = I_2$. Ainsi, $N = A^{-1}$ et A est inversible.

Réciproquement, si A est inversible, l'application $\varphi_{A^{-1}}$ est linéaire et, pour toute matrice M ,

$$\varphi_{A^{-1}}(\varphi_A(M)) = A^{-1}AM = M, \quad \varphi_A(\varphi_{A^{-1}}(M)) = AA^{-1}M = M.$$

Ainsi, $\varphi_{A^{-1}}$ est l'application réciproque de φ_A . Finalement,

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un automorphisme} \iff A \text{ est inversible.}}$$

Partie II – Un exemple

Dans cette partie,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 1) On cherche directement des vecteurs propres. Pour

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on vérifie

$$AX_1 = X_1, \quad AX_{-1} = -X_{-1}.$$

Ces deux matrices colonnes ne sont pas proportionnelles ; elles forment donc une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable, avec les valeurs propres } 1 \text{ et } -1.}$$

- 2) Calculons l'image des quatre matrices de la base canonique :

$$\begin{aligned} \varphi_A(E_{11}) &= E_{11}, & \varphi_A(E_{12}) &= E_{12}, \\ \varphi_A(E_{21}) &= 2E_{11} - E_{21}, & \varphi_A(E_{22}) &= 2E_{12} - E_{22}. \end{aligned}$$

Les colonnes de la matrice représentative sont les coordonnées de ces images dans $\mathcal{B}$. On obtient donc

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Soit $V = {}^t(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)$. La relation $TV = V$ équivaut à

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Ainsi, pour la valeur propre 1, le sous-espace propre admet pour base

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

La relation $TV = -V$ équivaut à

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = -x_4.$$

Pour la valeur propre -1 , une base du sous-espace propre est donc

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Les deux valeurs sont effectivement des valeurs propres, et les équations précédentes montrent qu'il n'y en a pas d'autre. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(T) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \\ \text{Sp}(T) &= \{-1, 1\}, \\ \mathcal{E}_{-1}(T) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

4) Considérons les quatre vecteurs propres affichés à la question précédente. Si une combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle, les troisième et quatrième coordonnées imposent d'abord que les coefficients des deux derniers vecteurs soient nuls. Les deux premières coordonnées imposent ensuite que les deux autres coefficients soient nuls. Cette famille de quatre vecteurs est donc libre dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, qui est de dimension 4 ; c'est une base. Par conséquent,

T est diagonalisable.

Partie III – Autres résultats

1) Écrivons

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}.$$

Par définition de la matrice T_A , l'égalité $T_A V = \lambda V$ équivaut à

$$AM = \lambda M, \quad \text{soit} \quad (A - \lambda I_2)M = 0_2.$$

Supposons, par l'absurde, que $A - \lambda I_2$ soit inversible. En multipliant la dernière égalité à gauche par son inverse, on obtiendrait $M = 0_2$, donc $V = 0$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi,

$$\boxed{A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible.}}$$

2) Puisque $AX = \mu X$, on a

$$AN = A \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX & 0 \end{pmatrix} = \mu N,$$

et, de même,

$$AN' = \begin{pmatrix} 0 & AX \end{pmatrix} = \mu N'.$$

Les colonnes de coordonnées de N et N' dans $\mathcal{B}$ sont respectivement

$$V = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

Comme $X \neq 0$, ces deux colonnes sont non nulles. Les égalités précédentes donnent

$$\boxed{T_A V = \mu V \quad \text{et} \quad T_A V' = \mu V'}.$$

3) Soit $\lambda \in \text{Sp}(T_A)$. La question 1 montre que $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible. L'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ représenté par cette matrice n'est donc pas bijectif. Dans un espace de dimension finie, le théorème du rang montre alors qu'il n'est pas injectif. Il existe donc une colonne $X \neq 0$ telle que

$$(A - \lambda I_2)X = 0,$$

et $\lambda \in \text{Sp}(A)$. On a prouvé $\text{Sp}(T_A) \subset \text{Sp}(A)$.

Réciproquement, si $\mu \in \text{Sp}(A)$, la question 2 construit une colonne propre non nulle de T_A associée à μ . Donc $\text{Sp}(A) \subset \text{Sp}(T_A)$. Finalement,

$$\boxed{\text{Sp}(T_A) = \text{Sp}(A).}$$

4) Supposons A diagonalisable. Il existe une base (X_1, X_2) de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A . Écrivons

$$X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (i \in \{1, 2\}).$$

La question 2 fournit alors quatre vecteurs propres de T_A :

$$V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Supposons

$$\alpha_1 V_1 + \beta_1 V'_1 + \alpha_2 V_2 + \beta_2 V'_2 = 0.$$

Les première et troisième coordonnées donnent $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0$, donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ puisque (X_1, X_2) est libre. Les deuxième et quatrième coordonnées donnent de même $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Les quatre vecteurs forment donc une famille libre, puis une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Cette base est constituée de vecteurs propres de T_A . Ainsi,

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \implies T_A \text{ diagonalisable.}}$$

Exercice 3

Partie I – Une première expérience aléatoire

- 1) À chaque étape, la probabilité d'obtenir la boule noire parmi les **reste** boules vaut $1/\text{reste}$. Tant qu'elle n'est pas obtenue, le nombre de boules restantes diminue d'une unité.

```
while rd.random() > 1/reste:
    rang = rang + 1
    reste = reste-1
```

- 2) Les cinq rectangles ont des hauteurs très proches de $1/5$. On conjecture donc que

$$X \text{ suit la loi uniforme sur } \llbracket 1, 5 \rrbracket.$$

- 3) L'événement $[X = 1]$ est N_1 , donc

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{N}.$$

L'événement $[X = 2]$ est $B_1 \cap N_2$. Par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \frac{N-1}{N} \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N}.$$

Enfin, $[X = 3] = B_1 \cap B_2 \cap N_3$, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(N_3) \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N-1} \frac{1}{N-2} = \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{N}.$$

- 4) Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$[X = k] = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k.$$

La formule des probabilités composées donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N-1} \cdots \frac{N-k+1}{N-k+2} \frac{1}{N-k+1} \\ &= \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket).$$

- 5) L'espérance d'une loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$ vaut $(N+1)/2$. Le nombre moyen de tirages nécessaires est donc

$$\mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{2}.$$

Partie II – Une deuxième expérience aléatoire

- 1) Sous la condition C_1 , l'urne choisie est U_1 . On reconnaît cette urne dès que la boule noire apparaît ; si elle apparaît en dernier, il faut tirer les N boules. Ainsi, sous la condition C_1 , la variable Y a la même loi que X . D'après la partie précédente,

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \mathbb{P}_{C_1}(Y = j) = \frac{1}{N}.$$

- 2) Sous la condition C_2 , toutes les boules tirées sont blanches. Tant qu'il reste une boule, les observations sont encore compatibles avec l'urne U_1 , dont la boule noire pourrait être la dernière. Il faut donc effectuer exactement N tirages. Ainsi,

$$\mathbb{P}_{C_2}(Y = j) = \begin{cases} 0, & 1 \leq j \leq N-1, \\ 1, & j = N. \end{cases}$$

- 3) Les événements (C_1, C_2) forment un système complet d'événements, avec $\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_2) = 1/2$. Les formules des probabilités totales donnent, pour $1 \leq j \leq N-1$,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}_{C_1}(Y = j) + \mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}_{C_2}(Y = j) = \frac{1}{2N}.$$

Pour $j = N$,

$$\mathbb{P}(Y = N) = \frac{1}{2} \frac{1}{N} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{2N}, & j \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}, & j = N. \end{cases}$$

- 4) La variable Y ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc son espérance existe. À l'aide de la loi précédente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{2N} + N \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N} \right) \\ &= \frac{1}{2N} \frac{N(N-1)}{2} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{N-1}{4} + \frac{2N+2}{4} = \frac{3N+1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{3N+1}{4}.$$

Partie III – Une troisième expérience aléatoire

Posons

$$p = \frac{1}{N}, \quad q = \frac{N-1}{N}.$$

À chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule noire vaut p et celle d'obtenir une boule blanche vaut q .

- 1) Il faut au moins deux tirages pour obtenir les deux couleurs. Tout entier $k \geq 2$ est possible, par exemple avec $k - 1$ boules blanches puis une boule noire. Ainsi,

$$T(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket.$$

- 2) Pour $k \geq 2$, l'événement $[T = k]$ est réalisé dans exactement deux situations incompatibles :

les $k - 1$ premières boules sont blanches et la k -ième est noire,
 les $k - 1$ premières boules sont noires et la k -ième est blanche.

Les tirages étant effectués avec remise, ils sont indépendants. On obtient

$$\mathbb{P}(T = k) = q^{k-1}p + p^{k-1}q.$$

Autrement dit,

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{N} \left(\frac{N-1}{N} \right)^{k-1} + \frac{N-1}{N} \left(\frac{1}{N} \right)^{k-1}.$$

- 3) Comme $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, les séries obtenues ci-dessous convergent. Pour $r \in]0, 1[$, la formule de l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $1 - r$ donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(pq^{k-1} + qp^{k-1}) \\ &= p \left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1 \right) + q \left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1 \right) \\ &= p \left(\frac{1}{p^2} - 1 \right) + q \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - (p + q) \\ &= N + \frac{N}{N-1} - 1 = N + \frac{1}{N-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(T) = N + \frac{1}{N-1}.$$

- 4) a) Lorsque $T = 2$, les tirages sont soit blanche puis noire, soit noire puis blanche. Dans les deux cas, $U = 1$. Les deux événements sont incompatibles, donc

$$\mathbb{P}([U = 1] \cap [T = 2]) = qp + pq = 2pq = \frac{2(N-1)}{N^2}.$$

- b) Pour $k \geq 3$, l'événement $[U = 1] \cap [T = k]$ impose que les $k - 1$ premières boules soient noires et que la k -ième soit blanche. En effet, dans l'autre configuration donnant $T = k$, on aurait $U = k - 1$. Ainsi,

$$\forall k \geq 3, \quad \mathbb{P}([U = 1] \cap [T = k]) = p^{k-1}q = \frac{N-1}{N^k}.$$

5) Soit $j \geq 2$.

- a) L'événement $[U = j] \cap [T = j + 1]$ est réalisé exactement lorsque les j premières boules sont blanches et la suivante est noire. Par indépendance des tirages,

$$\mathbb{P}([U = j] \cap [T = j + 1]) = q^j p = \frac{1}{N} \left(\frac{N-1}{N} \right)^j.$$

- b) Si $U = j \geq 2$, l'expérience s'arrête nécessairement après les j boules blanches initiales et la première boule noire, donc au rang $j + 1$. Par conséquent,

$$\forall k \geq 2, k \neq j + 1, \quad \mathbb{P}([U = j] \cap [T = k]) = 0.$$

- 6) L'événement constitué des tirages blanche, blanche, noire est inclus dans $[U = 2]$ et a pour probabilité $q^2 p > 0$. Ainsi $\mathbb{P}(U = 2) > 0$. On a également

$$\mathbb{P}(T = 2) = 2pq > 0,$$

alors que, d'après la question 5(b),

$$\mathbb{P}([U = 2] \cap [T = 2]) = 0.$$

Si T et U étaient indépendantes, cette dernière probabilité serait $\mathbb{P}(U = 2)\mathbb{P}(T = 2) > 0$, ce qui est impossible. Donc

$$T \text{ et } U \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

- 7) Les événements $([T = k])_{k \geq 2}$ forment un système complet d'événements. D'après les questions 4(a) et 4(b), les formules des probabilités totales donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = 1) &= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} p^{k-1} q \\ &= 2pq + q \frac{p^2}{1-p} = 2pq + p^2 \\ &= p(2-p) = \frac{2N-1}{N^2}. \end{aligned}$$

Pour $j \geq 2$, les questions 5(a) et 5(b) donnent directement

$$\mathbb{P}(U = j) = q^j p.$$

On vérifie que la somme de ces probabilités vaut

$$p(2-p) + \sum_{j=2}^{+\infty} p q^j = p(1+q) + p \frac{q^2}{1-q} = p(1+q) + q^2 = 1.$$

La loi de U est donc

$$\mathbb{P}(U = 1) = \frac{2N-1}{N^2}, \quad \forall j \geq 2, \quad \mathbb{P}(U = j) = \frac{1}{N} \left(\frac{N-1}{N} \right)^j.$$