

MATHÉMATIQUES E (épreuve n° 289)
ANNÉE 2015
Épreuve conçue par H E C Paris
Voie économique et commerciale

Le sujet

Le sujet de cette année était composé d'un exercice d'algèbre linéaire et d'un problème à dominante probabiliste et analytique.

L'exercice avait pour objet l'étude d'un endomorphisme (projecteur) dont on recherchait « à la main » les principales propriétés : spectre, image, noyau, sous-espaces propres et diagonalisabilité.

Le problème comportait trois parties.

La partie I était consacrée à la comparaison de deux estimateurs (biais et convergence) de l'inverse du paramètre d'une loi exponentielle et utilisait un certain nombre de techniques de dérivation et d'intégration.

Dans la partie II, on prenait un exemple dans lequel la durée de vie d'un composant électronique suivait une loi exponentielle et on calculait un certain nombre de caractéristiques ainsi que leurs estimations issues d'un échantillon observé ; cette partie s'achevait par la détermination d'un intervalle de confiance de la durée de vie moyenne théorique du composant.

La partie III établissait la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires vers la loi de Gumbel et proposait quelques questions de Scilab (simulation de la loi de Gumbel, valeur approchée de l'espérance de la loi de Gumbel par une méthode de Monte-Carlo).

Les résultats statistiques

L'exercice et le problème comptaient respectivement pour 20% et 80% des points du barème. Plus précisément, les parties I, II et III du problème comptaient respectivement pour 24%, 21% et 35% des points du barème.

Sur les 2057 candidats ayant composé dans cette épreuve, la note moyenne est de 9,17 avec un écart-type de 4,22.

Les résultats par école sont les suivants :

- HEC (1550 candidats) – moyenne : 9,93 ; écart-type : 4,20.
- ESCP Europe (1969 candidats) – moyenne : 9,44 ; écart-type : 4,07.

Près de 6%, soit 119 candidats, obtiennent une note supérieure à 16 et 11 candidats se voient attribuer la note maximale de 20. La note médiane est de 9,1 et les premier et troisième quartiles sont égaux à 6,5 et 12,1 respectivement.

Pour obtenir la note de 20, il fallait résoudre correctement les trois-quarts des points du barème, par exemple, l'exercice et dans le problème, les parties I et II ainsi que quelques questions de la partie III.

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Si la rédaction est moins désinvolte que par le passé, la présentation laisse beaucoup à désirer : omission de la numérotation des questions, copies pleines de ratures et à la limite de la lisibilité (écriture anarchique, non respect des lignes horizontales), absence de résultats encadrés, va-et-vient entre différentes questions des différentes parties du problème et entre l'exercice et le problème.

Exercice

Les correcteurs sont unanimes pour relever une très grande faiblesse des candidats en algèbre linéaire : près de 10% des candidats n'abordent pas l'exercice, les questions 3.a) à 5 n'ont été abordées que dans moins de 30% des copies, seuls 3% des candidats traitent l'exercice entièrement.

On observe des confusions de toute nature : *un sous-espace vectoriel est un élément d'un espace vectoriel, la dimension d'un endomorphisme, le carré d'un vecteur, une famille est libre dès que les vecteurs sont non nuls, $f \circ f(x) = f(x)f(x)$, etc.*

Dans la question 2, beaucoup ne voient pas le rapport avec le polynôme annulateur trouvé précédemment pour le calcul des valeurs propres et dans la question 3.c), les candidats éprouvent des difficultés dans la gestion du coefficient devant v pour le calcul de $f(e_i - e_{i+1})$.

Problème

- 1) Oubli fréquent de la formule donnant $F_X(x)$ pour x strictement négatif.
- 2) On oublie souvent d'invoquer l'indépendance pour le calcul de la variance et on mentionne trop souvent la linéarité de la variance.
- 3.a) Rares sont les justifications complètes de l'existence d'une densité.
- 3.c) Le changement de variable est rarement justifié.
- 3.e) La plupart du temps, la borne 1 n'est pas gérée correctement dans l'intégration par parties.
- 4.b) Contrairement à toute attente, cette question s'est révélée difficile même pour de bons candidats. Beaucoup ne reconnaissent pas la somme partielle de la série de Riemann. On peut même lire : « v_n a un nombre fini de termes jusqu'à n , donc elle converge ».
- 5.b) Même ceux qui connaissent la fonction de répartition de X ont beaucoup de mal à résoudre $P(X > h_p) = p$.
- 6.a) C'est très souvent une loi binomiale qui est proposée, sans référence au modèle. On se contente souvent d'un début de réflexion sur les valeurs que peut prendre $N(t)$.
- 7.a) Certains utilisent la bijectivité de la fonction Φ mais la considèrent linéaire.
- 7.b) Les hypothèses du théorème limite central sont fréquemment absentes.
- 8.c) On trouve encore trop souvent des passages à l'exponentielle avec des équivalents.
- 11.b) (i) La plupart du temps, on trouve des réponses très lapidaires telles que « oui ». On observe aussi des confusions (intervalle de -2 à 400 avec un pas de 2).
- 11.b) (ii) « Le programme va renvoyer un graphique avec la fonction $F(x)$ en trois dimensions » ou bien très sèchement sans autre explication « Erreur sera le résultat ».
- 11.f) Aucune réponse correcte à cette question.