

Corrigé Ecricome 2016

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	4
Exercice 3	9

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2016.

Exercice 1

Partie A

On a

$$A = M(1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = M(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la définition donne

$$M(x, y) = xA + yB.$$

Ainsi, $E = \text{Vect}(A, B)$, donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $\alpha A + \beta B = 0_3$, le coefficient $(1, 1)$ donne $3\alpha = 0$, puis le coefficient $(1, 2)$ donne $2\beta = 0$. La famille (A, B) est donc libre. Par conséquent,

$$\boxed{(A, B) \text{ est une base de } E \quad \text{et} \quad \dim(E) = 2.}$$

2. Pour $\lambda = 1$, le système $(A - I_3)X = 0$ s'écrit

$$\begin{cases} 2u - 2v + 2w = 0, \\ -u + 3v - 2w = 0, \\ 4v - 2w = 0. \end{cases}$$

La troisième égalité donne $w = 2v$, puis la première donne $u = -v$. Ainsi,

$$\ker(A - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\lambda = 2$, le système $(A - 2I_3)X = 0$ donne

$$\begin{cases} u - 2v + 2w = 0, \\ -u + 2v - 2w = 0, \\ 4v - 3w = 0, \end{cases}$$

d'où $w = 4v/3$ et $u = -2v/3$. Donc

$$\ker(A - 2I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

Enfin, pour $\lambda = 3$,

$$\begin{cases} -2v + 2w = 0, \\ -u + v - 2w = 0, \\ 4v - 4w = 0, \end{cases}$$

d'où $w = v$ et $u = -v$. Par suite,

$$\ker(A - 3I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Les trois réels 1, 2 et 3 sont donc des valeurs propres distinctes de A . D'après la propriété des valeurs propres distinctes, les trois vecteurs propres obtenus forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right), & E_2(A) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right), \\ E_3(A) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), & & A \text{ est diagonalisable.} \end{aligned}$$

3. En plaçant les vecteurs propres précédents dans l'ordre des coefficients diagonaux de D_A , on choisit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sa première ligne est bien $(1, -2, 1)$. Ses colonnes forment une base d'après la question précédente, donc P est inversible. De plus, $AP = PD_A$, puis, en multipliant à droite par P^{-1} ,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = PD_A P^{-1}.$$

4. Effectuons la réduction par lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

On remplace ensuite la première ligne par la première ligne augmentée de deux fois la deuxième, puis diminuée de la troisième :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ainsi,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. En notant X_1, X_2, X_3 les colonnes de P , on calcule

$$\begin{aligned} BX_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ BX_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -X_2, \\ BX_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_3. \end{aligned}$$

Donc $BP = PD_B$ avec $D_B = \text{diag}(0, -1, -1)$. Il vient

$$D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = PD_BP^{-1}.$$

6. Comme $M(x, y) = xA + yB$, les deux égalités de similitude précédentes donnent

$$M(x, y) = P(xD_A + yD_B)P^{-1}.$$

Or

$$xD_A + yD_B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$D(x, y) = \text{diag}(x, 2x - y, 3x - y) \quad \text{et} \quad M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}.$$

7. Comme P et P^{-1} sont inversibles, $M(x, y)$ est inversible si et seulement si $D(x, y)$ l'est. Une matrice diagonale est inversible si et seulement si chacun de ses coefficients diagonaux est non nul. Donc

$$M(x, y) \text{ est inversible} \iff x \neq 0, \quad 2x - y \neq 0, \quad 3x - y \neq 0.$$

8. Un calcul direct donne

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = -B = M(0, -1).$$

Ainsi $B^2 \in E$. D'autre part,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 8 \\ -7 & 10 & -8 \\ -4 & 12 & -7 \end{pmatrix}.$$

Si $A^2 = M(x, y)$, les coefficients $(1, 1)$ et $(3, 1)$ imposeraient $x = 11/3$ et $y = 2$. Le coefficient $(1, 2)$ de $M(x, y)$ vaudrait alors $-2x + 2y = -10/3$, alors que celui de A^2 vaut -6 . C'est impossible. Ainsi,

$$B^2 = -B \in E \quad \text{et} \quad A^2 \notin E.$$

Partie B

1. D'après les conditions initiales,

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Les trois relations de récurrence donnent

$$X_{n+1} = CX_n, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dans $M(x, y)$, le coefficient $(1, 1)$ impose $x = 1$, puis le coefficient $(1, 2)$ impose $-2 + 2y = 4$, soit $y = 3$. Tous les autres coefficients coïncident alors. Ainsi,

$$C = M(1, 3) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Montrons par récurrence que $X_n = C^n X_0$. Au rang 0, $C^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$. Si $X_n = C^n X_0$, alors

$$X_{n+1} = C X_n = C C^n X_0 = C^{n+1} X_0.$$

La propriété est initialisée et héréditaire, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = C^n X_0.$$

4. D'après la partie A,

$$C = P \operatorname{diag}(1, -1, 0) P^{-1}.$$

De plus,

$$P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} X_n &= P \operatorname{diag}(1, (-1)^n, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2(-1)^n \\ -1 + 3(-1)^n \\ -2 + 4(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En tenant compte des valeurs initiales,

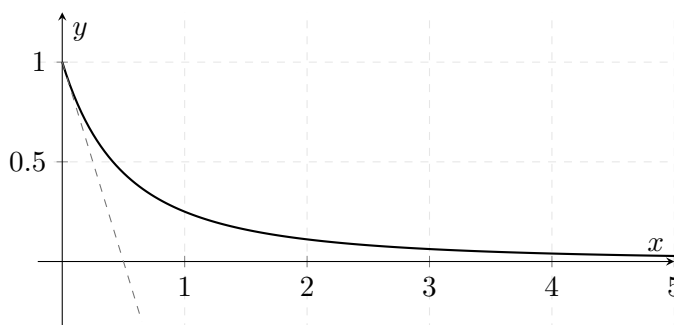
$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 0, \\ \forall n \geq 1, \quad a_n &= 1 - 2(-1)^n, \quad b_n = -1 + 3(-1)^n, \quad c_n = -2 + 4(-1)^n. \end{aligned}$$

Exercice 2

1. (a) Pour $x \geq 0$,

$$g'_0(x) = -\frac{2}{(1+x)^3} < 0.$$

Ainsi g_0 est strictement décroissante, $g_0(0) = 1$ et $g_0(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. De plus, $g'_0(0) = -2$, donc sa tangente en 0 a pour équation $y = 1 - 2x$.



g_0 est strictement décroissante de 1 vers 0,
et sa tangente en 0 est $y = 1 - 2x$.

- (b) Pour $n \geq 1$, g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables. Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= \frac{n(\ln(1+x))^{n-1}}{(1+x)^3} - \frac{2(\ln(1+x))^n}{(1+x)^3} \\ &= \frac{(\ln(1+x))^{n-1}}{(1+x)^3} (n - 2\ln(1+x)). \end{aligned}$$

Tous les facteurs autres que le dernier sont positifs ou nuls, et le cas $x = 0$ se vérifie directement. Ainsi,

$$g'_n(x) \geq 0 \iff n \geq 2\ln(1+x) \iff x \leq e^{n/2} - 1.$$

La fonction est donc croissante sur $[0, e^{n/2} - 1]$, puis décroissante. Enfin, en posant $u = \ln(1+x)$, on a

$$g_n(x) = u^n e^{-2u} \longrightarrow 0$$

d'après les croissances comparées. Par conséquent,

g_n croît sur $[0, e^{n/2} - 1]$ puis décroît sur $[e^{n/2} - 1, +\infty[$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$.

- (c) Le maximum est atteint au point $x_n = e^{n/2} - 1$. On obtient

$$g_n(x_n) = \frac{(n/2)^n}{(e^{n/2})^2} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n = M_n.$$

Pour n assez grand, $n/(2e) > 1$, et cette quantité tend vers $+\infty$; on a alors $M_n \geq n/(2e) \rightarrow +\infty$. Donc

$$\max_{x \geq 0} g_n(x) = \left(\frac{n}{2e}\right)^n \quad \text{et} \quad M_n \longrightarrow +\infty.$$

- (d) On calcule

$$x^{3/2} g_n(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^{3/2} \frac{(\ln(1+x))^n}{\sqrt{1+x}}.$$

Le premier facteur est compris entre 0 et 1, et le second tend vers 0 d'après les croissances comparées. Il vient

$$g_n(x) = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

2. (a) Pour $A \geq 0$,

$$\int_0^A \frac{dt}{(1+t)^2} = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+A}.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$,

$$I_0 \text{ converge et } I_0 = 1.$$

(b) D'après la question 1.d,

$$g_n(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

Comme l'intégrale de $t \mapsto t^{-3/2}$ sur $[1, +\infty[$ converge, le critère de comparaison montre que l'intégrale de g_n sur $[1, +\infty[$ converge. Sur $[0, 1]$, g_n est continue. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad I_n \text{ converge.}}$$

(c) Soit $A > 0$. On effectue une intégration par parties sur $[0, A]$ avec

$$u(t) = (\ln(1+t))^{n+1}, \quad v(t) = -\frac{1}{1+t}.$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ et

$$u'(t) = \frac{(n+1)(\ln(1+t))^n}{1+t}, \quad v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^A g_{n+1}(t) dt &= \left[-\frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{1+t} \right]_0^A \\ &\quad + (n+1) \int_0^A \frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} dt. \end{aligned}$$

Le terme de bord tend vers 0 par croissances comparées. En faisant tendre A vers $+\infty$, il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = (n+1)I_n.}$$

(d) La relation précédente et $I_0 = 1 = 0!$ donnent par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = n!}.$$

3. (a) La fonction f_n est positive. Elle est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$, et elle n'a éventuellement qu'une discontinuité en 0. Enfin,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g_n(x) dx = \frac{I_n}{n!} = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$$

(b) Puisque $X_n \geq 0$, l'existence de son espérance demanderait la convergence de

$$\frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{x(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} dx.$$

Pour $x \geq 1$, on a $(1+x)^2 \leq 4x^2$, puis

$$\frac{x(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \geq \frac{(\ln x)^n}{4x}.$$

Or, pour $A > 1$,

$$\int_1^A \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{(\ln A)^{n+1}}{n+1} \rightarrow +\infty.$$

Par comparaison,

$$\boxed{X_n \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

(c) Comme X_n prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$,

$$\boxed{\forall x < 0, \quad F_n(x) = 0.}$$

(d) Pour $x \geq 0$,

$$F_0(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2} = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Donc

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad F_0(x) = \frac{x}{1+x}.$$

(e) Soient $x \geq 0$ et $k \geq 1$. On effectue une intégration par parties sur $[0, x]$ avec

$$u(t) = (\ln(1+t))^k, \quad v(t) = -\frac{1}{1+t}.$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, avec

$$u'(t) = \frac{k(\ln(1+t))^{k-1}}{1+t}, \quad v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \frac{1}{k!} \left(-\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + k \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2} dt \right) \\ &= -\frac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)} + F_{k-1}(x). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)}.$$

(f) En sommant les égalités précédentes pour k allant de 1 à n ,

$$F_n(x) - F_0(x) = -\frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^n \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}.$$

Comme $F_0(x) = 1 - 1/(1+x)$,

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad F_n(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^n \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}.$$

(g) Si $x < 0$, $F_n(x) = 0$ pour tout n . Si $x \geq 0$, la somme précédente converge vers

$$\exp(\ln(1+x)) = 1+x.$$

On en déduit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0.}$$

(h) Supposons qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que X_n converge en loi vers X . D'après la définition de la convergence en loi, sa fonction de répartition devrait vérifier $F_X(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela est impossible, car une fonction de répartition tend vers 1 en $+\infty$. Ainsi,

$$\boxed{(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne converge pas en loi.}}$$

4. (a) Puisque $X_n \geq 0$, on a $1 + X_n \geq 1$, donc le logarithme est bien défini. De plus,

$$Y_n \text{ prend ses valeurs dans } [0, +\infty[.$$

- (b) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} \ln(1+x) \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} dx \\ &= \frac{I_{n+1}}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1. \end{aligned}$$

L'intégrale converge d'après la question 2. Ainsi,

$$\mathbb{E}(Y_n) = n+1.$$

- (c) De même,

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{I_{n+2}}{n!} = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2).$$

Ce moment existe, donc la variance existe, et

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - \mathbb{E}(Y_n)^2 = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = n+1.$$

Ainsi,

$$\mathbb{V}(Y_n) = n+1.$$

- (d) La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(\ln(1+X_n) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_n \leq e^x - 1) = F_n(e^x - 1). \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) = F_n(e^x - 1).$$

- (e) Pour $x < 0$, $H_n(x) = 0$. Pour $x > 0$, on dérive :

$$H'_n(x) = f_n(e^x - 1)e^x = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

Une densité de Y_n est donc

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^n}{n!} e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

- (f) Pour $n = 0$,

$$h_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi Y_0 suit la loi exponentielle de paramètre 1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable $y = \ln(1+t)$ donne

$$\mathbb{E}(Y_0^k) = \int_0^{+\infty} y^k e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+t))^k}{(1+t)^2} dt = I_k = k!.$$

Finalement,

$$Y_0 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(Y_0^k) = k!.$$

Exercice 3

Résultats préliminaires

1. Soient $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. Par indépendance et puisque X et Y ont la même loi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) &= \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) \\ &= \mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i]).\end{aligned}$$

Ainsi,

X et Y sont échangeables.

2. Pour $i \in \mathbb{N}$, les événements $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements. Les formules des probabilités totales donnent

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]).$$

Par échangeabilité,

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i]).$$

Les événements $([X = j])_{j \in \mathbb{N}}$ formant eux aussi un système complet d'événements, une seconde application des formules des probabilités totales donne

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i).$$

Étude d'un exemple

3. (a) La boule est blanche avec la probabilité $b/(b+n)$.

```
def tirage(b, n):
    r = rd.random()
    if r < b/(b+n):
        return 2
    return 1
```

- (b) Dans la première variante, on augmente le nombre de boules de la couleur obtenue. Dans la deuxième, on augmente l'autre nombre.

```
def experience(b, n, c, variante):
    x = tirage(b, n)
    if variante == 1:
        if x == 1:
            n = n+c
        else:
            b = b+c
    elif variante == 2:
        if x == 1:
            b = b+c
        else:
            n = n+c
    y = tirage(b, n)
    return x, y
```

- (c) À chaque simulation, on augmente les trois effectifs correspondant aux valeurs observées.

```
def estimation(b, n, c, variante, N):
    loiX = np.zeros(2)
    loiY = np.zeros(2)
    loiXY = np.zeros((2, 2))
    for k in range(N):
        x, y = experience(b, n, c, variante)
        loiX[x-1] = loiX[x-1]+1
        loiY[y-1] = loiY[y-1]+1
        loiXY[x-1, y-1] = loiXY[x-1, y-1]+1
    loiX = loiX/N
    loiY = loiY/N
    loiXY = loiXY/N
    return loiX, loiY, loiXY
```

- (d) Dans la variante 1, les deux coefficients hors diagonale de la loi du couple sont presque égaux : on conjecture l'échangeabilité. En revanche, 0,498 est éloigné de $0,666 \times 0,665 \simeq 0,443$, donc on ne conjecture pas l'indépendance.

Dans la variante 2, les coefficients hors diagonale 0,333 et 0,250 diffèrent : on ne conjecture pas l'échangeabilité. De plus, 0,333 diffère de $0,665 \times 0,583 \simeq 0,388$, donc on ne conjecture pas l'indépendance.

Dans la variante 3, les coefficients hors diagonale sont presque égaux. De plus, les quatre probabilités conjointes sont proches des produits des probabilités marginales correspondantes. On conjecture donc les deux propriétés. Ainsi,

	échangeables	indépendantes
variante 1	oui	non
variante 2	non	non
variante 3	oui	oui

4. On se place dans la variante 1.

- (a) Au premier tirage, l'urne contient n boules noires et b boules blanches. Donc

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{n}{n+b}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{b}{n+b}.$$

- (b) Si $X = 1$, après la remise et l'ajout, l'urne contient $n+c$ boules noires et b boules blanches. Si $X = 2$, elle contient n boules noires et $b+c$ boules blanches. Les probabilités composées donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) &= \frac{n}{n+b} \frac{n+c}{n+b+c}, \\ \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) &= \frac{n}{n+b} \frac{b}{n+b+c}, \\ \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) &= \frac{b}{n+b} \frac{n}{n+b+c}, \\ \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2]) &= \frac{b}{n+b} \frac{b+c}{n+b+c}. \end{aligned}$$

Ainsi,

	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$\frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)}$	$\frac{nb}{(n+b)(n+b+c)}$
$X = 2$	$\frac{bn}{(n+b)(n+b+c)}$	$\frac{b(b+c)}{(n+b)(n+b+c)}$

- (c) Les événements $[X = 1]$ et $[X = 2]$ forment un système complet d'événements. Les formules des probabilités totales donnent

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= \frac{n(n+c) + bn}{(n+b)(n+b+c)} = \frac{n(n+b+c)}{(n+b)(n+b+c)} = \frac{n}{n+b}, \\ \mathbb{P}(Y = 2) &= \frac{nb + b(b+c)}{(n+b)(n+b+c)} = \frac{b(n+b+c)}{(n+b)(n+b+c)} = \frac{b}{n+b}.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{n}{n+b}, \quad \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{b}{n+b}.$$

- (d) Les deux probabilités hors diagonale de la loi conjointe sont égales, et les égalités sur la diagonale sont immédiates. Ainsi X et Y sont échangeables.

En revanche,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) - \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) &= \frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)} - \frac{n^2}{(n+b)^2} \\ &= \frac{nbc}{(n+b)^2(n+b+c)} > 0,\end{aligned}$$

car n, b, c sont strictement positifs. L'égalité nécessaire à l'indépendance n'est donc pas vérifiée. Finalement,

X et Y sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.