MATHÉMATIQUES E (Épreuve n° 289)
ANNÉE 2016
Épreuve conçue par HEC Paris
Voie économique et commerciale

Le sujet

Le sujet de cette année était composé d'un exercice d'algèbre linéaire et d'un problème à dominante analytique avec une application statistique.

L'exercice étudiait essentiellement un endomorphisme f associé à une matrice $A = X\,{}^tX$ (image, noyau, valeurs propres et sous-espaces propres de A).

Le problème comportait trois parties et étudiait quelques aspects de la fonction de production microéconomique d'une entreprise qui produit un certain bien à une époque donnée, à partir des deux facteurs de production travail et capital.
Les outils traditionnels d'analyse de cette fonction de production étaient définis et mis en évidence. Ainsi, on déterminait le *taux marginal de substitution technique* du facteur capital au facteur travail, égal à la quantité additionnelle de facteur capital dont l'entreprise doit disposer pour remplacer une unité de facteur travail tout en maintenant la production à un niveau inchangé. On définissait également *l'élasticité de substitution* par le quotient entre la variation relative du rapport capital / travail et la variation relative de leurs prix respectifs.
La partie I était consacrée à l'étude de la fonction CES (Constant Elasticity Substitution) et mettait en évidence les principales propriétés de cette fonction.
Dans la partie II, on établissait une caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante et on montrait, sous certaines conditions, la tendance de la fonction CES vers une fonction de Cobb-Douglas.
Enfin, la partie III proposait une estimation des paramètres d'une fonction de Cobb-Douglas (ils mesurent des coefficients d'élasticité) par la méthode du maximum de vraisemblance et une visualisation (Scilab) des résultats à partir d'un échantillon d'entreprises.

Les résultats statistiques

L'exercice et le problème comptaient respectivement pour 25% et 75% des points du barème. Plus précisément, les parties I, II et III du problème comptaient respectivement pour 30%, 18% et 27% des points du barème.

Sur les 2172 candidats ayant composé dans cette épreuve, la note moyenne est de 9,24 avec un écart-type de 4,25.

Les résultats par école sont les suivants :

- HEC (1682 candidats) – moyenne : 9,85 ; écart-type : 4,19.
- ESCP Europe (2100 candidats) – moyenne : 9,42 ; écart-type : 4,17.

Près de 5%, soit 104 candidats, obtiennent une note supérieure à 16 et 15 candidats se voient attribuer la note maximale de 20. La note médiane est de 9,5 et les premier et troisième quartiles sont égaux à 5,8 et 12,3 respectivement.
Pour obtenir la note de 20, il fallait obtenir au moins les deux-tiers des points du barème.
Notons que les questions de Scilab avaient un poids correspondant à 7,5% des points de barème.

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Si la rédaction est moins désinvolte que par le passé, la présentation laisse beaucoup à désirer : omission de la numérotation des questions, copies pleines de ratures et à la limite de la lisibilité (écriture anarchique, non respect des lignes horizontales), absence de résultats encadrés, va-et-vient entre différentes questions des différentes parties du problème et entre l'exercice et le problème.

Exercice

Les correcteurs sont unanimes pour relever une très grande faiblesse des candidats en algèbre linéaire, cette baisse du niveau s'accélérant d'année en année. Il est assez symptomatique que nombre de candidats ne savent pas calculer un produit de matrices !
On observe des confusions et des erreurs de toute nature :

- « A est diagonalisable car c'est une colonne » ou bien « car elle est inversible » ou encore « car elle n'a aucun 0 sur sa diagonale ».
- « Une matrice et sa transposée commutent ».
- « $AB = 0$, donc $A = 0$ ou $B = 0$ » (pour des matrices).
- Très souvent, le théorème du rang devient : « dim (f) = rg (f) + dim (Ker f) ».

Problème

Les questions sont souvent abordées mais s'achèvent souvent par « non aboutie » ou bien écrivent ce qu'il faudrait faire… sans le faire ! Rappelons que les candidats ne doivent recopier que ce qui est utile.
Beaucoup de candidats ne savent pas dériver et font de nombreuses erreurs de calcul ou bien écrivent trois pages de calcul pour prouver un résultat élémentaire (simplification de fraction par exemple).
Dans la question 2.a), très peu de candidats justifient la classe C^2 et considèrent que les fonctions sont polynomiales.
Les questions 5 à 8 sont abordées par peu de candidats et correctement traitées par une infime partie d'entre eux.
La partie III n'est abordée que par deux-tiers des candidats et la moitié d'entre eux n'obtiennent aucun point à cette partie !
Par exemple, on note quasiment aucune réponse correcte à la question 13.a) : les candidats qui l'ont abordée se sont contentés d'échanger les rôles de u et t dans la ligne de code (4) !