

Corrigé Ecricome 2017

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	4
Exercice 3	6

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2017.

Exercice 1

Partie A

1. Posons $C = A - I$. Alors

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deux multiplications donnent

$$C^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^3 = C^2 C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - I)^3 = 0_3.$$

2. Le polynôme $(X - 1)^3$ annule A . Par inclusion du spectre dans les racines d'un polynôme annulateur, toute valeur propre de A vaut 1.

De plus, $C^2 \neq 0_3$. Il existe donc $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $C^2 U \neq 0$. En posant $V = C^2 U$, on obtient $V \neq 0$ et $CV = C^3 U = 0$, donc $AV = V$. Par conséquent,

l'unique valeur propre de A est 1.

3. Puisque 0 n'est pas valeur propre de A , celle-ci est inversible. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux vaudraient 1; on aurait alors $A = I$, ce qui est faux. Donc

A est inversible et n'est pas diagonalisable.

Partie B

4. Sur $] -1, 1[$, $1 + x > 0$, donc φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad \varphi''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}.$$

Ainsi,

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2}, \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.$$

5. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 donne

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\alpha = -\frac{1}{8}.$$

6. Avec $P(x) = 1 + x/2 - x^2/8$,

$$\begin{aligned}(P(x))^2 &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2 \\ &= 1 + x + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)x^2 - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}.\end{aligned}$$

D'où

$$(P(x))^2 = 1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}.$$

7. Comme $C^3 = 0_3$, on a aussi $C^4 = 0_3$. La question précédente donne donc

$$(P(C))^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 = I + C = A.$$

Or

$$P(C) = I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2 = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 & 1 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 & 1 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{vérifie} \quad M^2 = A.$$

Partie C

8. (a) Puisque $v = (A - I)w = Cw$ et $u = Cv$, les calculs donnent

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$u = (-6, -6, 0), \quad v = (1, 1, -3).$$

(b) Supposons $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$. Les trois coordonnées donnent

$$-6\lambda + \mu + \nu = 0, \quad -6\lambda + \mu = 0, \quad -3\mu + \nu = 0.$$

Les deux premières égalités donnent $\nu = 0$, puis la troisième donne $\mu = 0$, et enfin $\lambda = 0$. La famille est libre; elle contient trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3. Donc

$$\mathcal{B}' = (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

(c) On a $u = C^2w$, donc $Cu = C^3w = 0$. Par ailleurs $Cv = u$ et $Cw = v$. Ainsi

$$f(u) = u, \quad f(v) = u + v, \quad f(w) = v + w.$$

Les colonnes des coordonnées de ces images dans $\mathcal{B}'$ donnent

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

(d) La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathcal{B}'$ est une base, P est inversible. La formule de changement de base donne

$$T = P^{-1}AP.$$

9. (a) Si $N^2 = T$, alors

$$NT = N^3 = TN.$$

Écrivons $N = (n_{ij})$. L'égalité $NT = TN$, calculée coefficient par coefficient, impose

$$n_{21} = n_{31} = n_{32} = 0, \quad n_{11} = n_{22} = n_{33}, \quad n_{12} = n_{23}.$$

Il existe donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(b) Pour une telle matrice,

$$N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

L'égalité $N^2 = T$ équivaut à

$$a^2 = 1, \quad 2ab = 1, \quad b^2 + 2ac = 0.$$

Ainsi $a \in \{-1, 1\}$, puis $b = a/2$ et $c = -a/8$. Il y a exactement deux solutions :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -N_1.$$

10. Si $M^2 = A$, posons $N = P^{-1}MP$. Alors

$$N^2 = P^{-1}M^2P = P^{-1}AP = T.$$

Réciproquement, si $N^2 = T$, la matrice $M = PNP^{-1}$ vérifie $M^2 = A$. La question précédente fournit donc exactement deux solutions :

$$M_1 = PN_1P^{-1}, \quad M_2 = PN_2P^{-1}.$$

11. L'ensemble E contient M_1 et $-M_1 = M_2$, mais il ne contient pas leur somme 0_3 , puisque $0_3^2 \neq A$. Il n'est donc pas stable par addition. Ainsi,

$$E \text{ n'est pas un espace vectoriel.}$$

Exercice 2

Partie A

1. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$ et $ax^{2a} \rightarrow 0$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, les croissances comparées donnent $\ln x/x^{2a} \rightarrow 0$, donc $\ln x - ax^{2a} \rightarrow -\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty.$$

2. Pour $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2 x^{2a-1} = \frac{1 - 2a^2 x^{2a}}{x}.$$

Le dénominateur est positif et le numérateur s'annule seulement en

$$x_0 = \left(\frac{1}{2a^2} \right)^{1/(2a)}.$$

Il est positif avant x_0 et négatif après. De plus,

$$\varphi(x_0) = \ln(x_0) - ax_0^{2a} = -\frac{\ln(2a^2) + 1}{2a}.$$

D'où

x	0	x_0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$	$-\infty$	$-\frac{\ln(2a^2) + 1}{2a}$	$-\infty$

3. On a

$$\varphi(x_0) > 0 \iff \ln(2a^2) + 1 < 0 \iff a < \sqrt{\frac{1}{2e}}.$$

Dans ce cas, la continuité et la stricte monotonie de φ sur $]0, x_0]$ puis sur $[x_0, +\infty[$ donnent, par le théorème des valeurs intermédiaires, exactement deux racines $z_1 < x_0 < z_2$.

En cas d'égalité, le maximum vaut 0 et x_0 est l'unique racine. Au-delà, le maximum est négatif et il n'y a aucune racine. Donc

$a < 1/\sqrt{2e}$	deux solutions $z_1 < x_0 < z_2$
$a = 1/\sqrt{2e}$	une solution x_0
$a > 1/\sqrt{2e}$	aucune solution

Partie B

4. Les fonctions logarithme et puissance sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Les produits et compositions intervenant dans f conservent cette régularité. Ainsi,

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U.$$

5. Pour $(x, y) \in U$,

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{\ln y}{x} - ay^a x^{a-1}, \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{\ln x}{y} - ax^a y^{a-1}.$$

6. Les deux dérivées s'annulent si et seulement si

$$\ln y = a(xy)^a, \quad \ln x = a(xy)^a.$$

On obtient alors $\ln x = \ln y$, donc $x = y$. En reportant, $\ln x = ax^{2a}$, soit $\varphi(x) = 0$. La réciproque se vérifie immédiatement. Par conséquent,

$$(x, y) \text{ est critique} \iff x = y \text{ et } \varphi(x) = 0.$$

7. Les résultats des questions 3 et 6 donnent directement

$a < 1/\sqrt{2e}$	(z_1, z_1) et (z_2, z_2)
$a = 1/\sqrt{2e}$	(x_0, x_0)
$a > 1/\sqrt{2e}$	aucun point critique

Partie C

8. Une nouvelle dérivation donne

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}f(x, y) &= -\frac{\ln y}{x^2} - a(a-1)y^a x^{a-2}, \\ \partial_{2,2}f(x, y) &= -\frac{\ln x}{y^2} - a(a-1)x^a y^{a-2}, \\ \partial_{1,2}f(x, y) &= \partial_{2,1}f(x, y) = \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1}. \end{aligned}$$

9. Puisque $\varphi(z_1) = 0$, on a $\ln z_1 = az_1^{2a}$. En remplaçant dans les expressions précédentes,

$$\partial_{1,1}f(z_1, z_1) = -az_1^{2a-2} - a(a-1)z_1^{2a-2} = -a^2z_1^{2a-2}.$$

Le même résultat vaut pour $\partial_{2,2}f$, tandis que

$$\partial_{1,2}f(z_1, z_1) = \frac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2}.$$

Donc

$$\nabla^2 f(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2z_1^{2a-2} & z_1^{-2} - a^2z_1^{2a-2} \\ z_1^{-2} - a^2z_1^{2a-2} & -a^2z_1^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

10. En posant $M = \nabla^2 f(z_1, z_1)$, on calcule

$$MX_1 = \left(\frac{1}{z_1^2} - 2a^2z_1^{2a-2} \right) X_1, \quad MX_2 = -\frac{1}{z_1^2} X_2.$$

Ainsi,

$$\lambda_1 = \frac{1 - 2a^2z_1^{2a}}{z_1^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2}.$$

11. Comme $z_1 < x_0$, on a $1 - 2a^2z_1^{2a} > 0$. Les deux valeurs propres de la hessienne sont donc de signes opposés. Il existe, dans tout voisinage de (z_1, z_1) , des valeurs de f supérieures et inférieures à $f(z_1, z_1)$. Ainsi,

$$f \text{ ne présente pas d'extremum local en } (z_1, z_1).$$

12. Au point (z_2, z_2) , le même calcul donne les valeurs propres

$$\frac{1 - 2a^2 z_2^{2a}}{z_2^2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{z_2^2}.$$

Comme $z_2 > x_0$, elles sont toutes deux négatives. Les conditions suffisantes pour un extremum local montrent que

$$f \text{ présente un maximum local en } (z_2, z_2).$$

Exercice 3

Partie A

1. Chaque tirage est uniforme parmi les n boules. Donc

$$X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n]), \quad \mathbb{E}(X_k) = \frac{n+1}{2}.$$

2. (a) La somme augmente d'au moins 1 à chaque tirage. Le seuil est donc atteint au plus tard au n -ième tirage, et toutes les valeurs de 1 à n sont possibles. Ainsi,

$$T_n(\Omega) = [1, n].$$

(b) Le seuil est atteint au premier tirage seulement si $X_1 = n$. Donc

$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

(c) L'égalité $T_n = n$ a lieu exactement lorsque les $n - 1$ premiers tirages donnent tous la boule 1; le dernier tirage suffit alors toujours à atteindre le seuil. Par indépendance des tirages,

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

3. Pour $n = 2$, $\mathbb{P}(T_2 = 1) = 1/2$, puis la seconde valeur reçoit la probabilité restante. Ainsi,

$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{1}{2}.$$

4. Pour $n = 3$, les questions précédentes donnent

$$\mathbb{P}(T_3 = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(T_3 = 3) = \frac{1}{9}.$$

Donc $\mathbb{P}(T_3 = 2) = 1 - 1/3 - 1/9 = 5/9$, et

$$\mathbb{E}(T_3) = \frac{1}{3} + 2\frac{5}{9} + 3\frac{1}{9} = \frac{16}{9}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(T_3 = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(T_3 = 2) = \frac{5}{9}, \quad \mathbb{P}(T_3 = 3) = \frac{1}{9}, \quad \mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}.$$

Partie B

5. La plus petite somme vaut k et la plus grande kn . Toute valeur intermédiaire est obtenue en répartissant l'excédent par rapport à k entre les k tirages, chaque ajout étant au plus $n - 1$. Ainsi,

$$S_k(\Omega) = \llbracket k, kn \rrbracket.$$

6. (a) Par définition,

$$S_{k+1} = S_k + X_{k+1}.$$

- (b) Les événements $([S_k = j])_{j \in \llbracket k, kn \rrbracket}$ forment un système complet d'événements. Pour $i \in \llbracket k + 1, n \rrbracket$, les formules des probabilités totales donnent

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j) \mathbb{P}_{[S_k=j]}(X_{k+1} = i - j).$$

Le nouveau tirage est indépendant des précédents et $i - j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc la probabilité conditionnelle vaut $1/n$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j).$$

7. (a) La formule du triangle de Pascal est

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.$$

- (b) Elle s'écrit

$$\binom{j-1}{k-1} = \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}.$$

En sommant de $j = k$ à $i - 1$, les termes se simplifient successivement :

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k}.$$

Le dernier terme est nul, donc

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- (c) Pour $k = 1$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(S_1 = i) = \mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \binom{i-1}{0}.$$

La propriété $\mathcal{H}_1$ est vraie. Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie, avec $k \leq n - 1$. Pour $i \in \llbracket k + 1, n \rrbracket$, les questions 6 et 7 donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k}. \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire. Par récurrence,

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}.$$

8. (a) Comme les sommes S_j sont croissantes, le seuil n'a pas encore été atteint après k tirages si et seulement si $S_k \leq n-1$. Donc

$$[T_n > k] = [S_k \leq n-1].$$

- (b) Pour $k \geq 1$, la question précédente et la loi de S_k donnent

$$\mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

Pour $k = 0$, les deux membres valent 1. Ainsi,

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

9. Comme T_n prend ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n) &= \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}(T_n = j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}(T_n = j) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \mathbb{P}(T_n = j) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k). \end{aligned}$$

En utilisant la question 8 puis la formule du binôme,

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

10. La limite usuelle définissant e donne

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{(1 + 1/n)^n}{1 + 1/n} \longrightarrow e.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n) = e.$$

Partie C

11. (a) Pour $k \geq 1$,

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}.$$

Ainsi, pour $N \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{N!} \rightarrow 1.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1.$$

(b) Tous les termes sont positifs et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = e.$$

La série converge, donc l'espérance existe et

$$\mathbb{E}(Y) = e.$$

12. Fixons $k \geq 1$. Pour $n \geq k+1$,

$$\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Chaque facteur tend vers 1 et le produit est fini. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{k!}.$$

13. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 1$, les fonctions de répartition de T_n et Y valent 0 en x . Si $x \geq 1$, posons $m = \lfloor x \rfloor$. Pour $n \geq m+1$,

$$\mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{P}(T_n \leq m) = 1 - \mathbb{P}(T_n > m) \rightarrow 1 - \frac{1}{m!}.$$

Or, par simplification successive,

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \sum_{k=1}^m \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{m!}.$$

Les fonctions de répartition convergent donc en tout réel. D'après la définition de la convergence en loi,

$$T_n \text{ converge en loi vers } Y.$$

```
14. def T(n):
    S = 0
    y = 0
    while S < n:
        tirage = rd.randint(1,n+1)
        S = S+tirage
        y = y+1
    return y
```

15. (a) Le vecteur renvoyé par `freqT(n)` contient, à la position $k - 1$, la fréquence observée de l'événement $[T_n = k]$ sur 100000 simulations. Ses cinq premières valeurs sont les hauteurs des barres.

Le vecteur renvoyé par `loithoY(n)` contient, à la position $k - 1$, la probabilité $\mathbb{P}(Y = k) = (k - 1)/k!$. Dans chaque graphique, les six premières valeurs sont représentées par des croix. Ainsi,

barres : fréquences de T_n ; croix : probabilités de Y .

- (b) Lorsque n augmente, les sommets des barres se rapprochent des croix. Les fréquences observées de T_n se rapprochent donc des probabilités correspondantes de Y , ce qui illustre le rapprochement des fonctions de répartition établi à la question 13. Ainsi,

la succession des graphiques illustre la convergence en loi de T_n vers Y .
