

Corrigé Ecricome 2018

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	5
Exercice 3	9

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2018.

Exercice 1

Partie I

1. (a) Un calcul matriciel donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$A^2 - 7A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}, \quad \boxed{A^2 - 7A = -12I_3.}$$

- (b) L'égalité précédente s'écrit

$$A^2 - 7A + 12I_3 = 0_3, \quad \text{soit} \quad (A - 3I_3)(A - 4I_3) = 0_3.$$

Le polynôme $(X-3)(X-4)$ annule donc A . D'après la propriété d'inclusion du spectre,

$$\boxed{\text{les seules valeurs propres possibles de } A \text{ sont } 3 \text{ et } 4.}$$

- (c) Pour la valeur 3, on résout $(A - 3I_3)U = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = x + 2z.$$

Ainsi,

$$\text{Ker}(A - 3I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Cet espace contient des matrices colonnes non nulles, donc 3 est valeur propre.

Pour la valeur 4,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0, \quad x = -z.$$

Donc

$$\text{Ker}(A - 4I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

et 4 est également valeur propre. Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{les valeurs propres de } A \text{ sont } 3 \text{ et } 4, \\ \text{Ker}(A - 3I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \text{Ker}(A - 4I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{array}}$$

- (d) Comme 0 n'est pas valeur propre de A , la matrice A est inversible. De plus, la réunion des bases obtenues à la question précédente contient trois matrices colonnes et forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi,

A est inversible et diagonalisable.

2. (a) Pour $U = {}^t(x, y, z)$, le système $BU = 0$ équivaut à

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ -x + y - z = 0, \end{cases} \iff z = 0, \quad x = y.$$

Ainsi, 0 est valeur propre de B et son sous-espace propre associé est ce noyau :

0 est valeur propre de B , $\text{Ker}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

- (b) On effectue des opérations élémentaires sur les lignes :

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il y a deux lignes non nulles. Par conséquent,

$\text{rg}(B - 2I_3) = 2.$

Le théorème du rang donne alors $\dim \text{Ker}(B - 2I_3) = 1$.

- (c) On calcule

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

3 est valeur propre de B , $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

- (d) La question b montre que $\text{Ker}(B - 2I_3)$ est de dimension 1. Une résolution du système donne

$$\text{Ker}(B - 2I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On dispose donc des trois matrices colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

associées respectivement aux valeurs propres distinctes 3, 0 et 2. Elles forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Par conséquent,

B est diagonalisable.

3. L'ordre imposé dans D_2 conduit à choisir, dans l'ordre, un vecteur propre de B associé à 3, puis à 0, puis à 2. Les conditions sur la première ligne fixent leurs signes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les calculs précédents donnent

$$AP = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad BP = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de P formant une base, P est inversible. Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie II

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on multiplie la relation définissant X_{n+2} à gauche par P^{-1} :

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= P^{-1}X_{n+2} \\ &= \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n \\ &= \frac{1}{6}P^{-1}APP^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BPP^{-1}X_n. \end{aligned}$$

Comme $D_1 = P^{-1}AP$, $D_2 = P^{-1}BP$ et $Y_n = P^{-1}X_n$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n.$$

2. En identifiant les trois coefficients des matrices colonnes dans la relation précédente, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n, \\ b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1}, \\ c_{n+2} = \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n. \end{cases}$$

3. Posons

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne $PQ = QP = I_3$. Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$Y_0 = {}^t(2, 2, 1), \quad Y_1 = {}^t(1, 1, -1).$$

4. La relation vérifiée par (a_n) s'écrit

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n).$$

Donc il existe deux réels λ, μ tels que

$$a_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Les valeurs $a_0 = 2$ et $a_1 = 1$ donnent

$$\lambda + \mu = 2, \quad \lambda - \frac{\mu}{2} = 1,$$

d'où $\lambda = 4/3$ et $\mu = 2/3$.

Pour $n \geq 1$, la deuxième relation donne immédiatement

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Cette formule vaut aussi pour $n = 0$ sous la forme $b_n = 2(1/2)^n$.

Enfin,

$$c_{n+2} - c_{n+1} = -\frac{1}{3}(c_{n+1} - c_n),$$

donc

$$c_n = \lambda' + \mu' \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Avec $c_0 = 1$ et $c_1 = -1$, on trouve

$$\lambda' + \mu' = 1, \quad \lambda' - \frac{\mu'}{3} = -1,$$

puis $\lambda' = -1/2$ et $\mu' = 3/2$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad b_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

5. Comme $X_n = PY_n$,

$$\alpha_n = a_n + b_n - c_n, \quad \beta_n = -a_n + b_n, \quad \gamma_n = -a_n + c_n.$$

En remplaçant a_n, b_n, c_n par leurs expressions, il vient

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{11}{6} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \\ \beta_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}, \\ \gamma_n &= -\frac{11}{6} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

6. (a) `def X(n):`
`Xold = np.array([3,0,-1])`
`Xnew = np.array([3,0,-2])`
`A = np.array([[2,1,-2],[0,3,0],[1,-1,5]])`
`B = np.array([[1,-1,-1],[-3,3,-3],[-1,1,1]])`
`for i in range(2,n+1):`
`Aux = (1/6)*np.dot(A,Xnew)+(1/6)*np.dot(B,Xold)`
`Xold = Xnew`
`Xnew = Aux`
`return Xnew`

(b) Les expressions précédentes donnent

$$\alpha_n \longrightarrow \frac{11}{6}, \quad \beta_n \longrightarrow -\frac{4}{3}, \quad \gamma_n \longrightarrow -\frac{11}{6}.$$

Sur la figure, les croix tendent vers $11/6$, les cercles vers $-4/3$ et les losanges vers $-11/6$. Ainsi,

croix : (α_n) ,	cercles : (β_n) ,	losanges : (γ_n) .
------------------------	-------------------------	---------------------------

Exercice 2

Partie I : étude de deux suites

1. (a) Quand $x \rightarrow 0^+$, $1/(x+1) \rightarrow 1$, $\ln(x) \rightarrow -\infty$ et $\ln(x+1) \rightarrow 0$. Ainsi $f(x) \rightarrow -\infty$.
 Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{1}{1+1/x}\right),$$

et les deux termes tendent vers 0. Donc

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$
--	--

(b) Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)^2 - x - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Son tableau de variations est

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = f(n). \end{aligned}$$

Ainsi,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = f(n).$

- (d) D'après les limites et la croissance de f , on a $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$. La question précédente donne alors $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc

$$(u_n)_{n \geq 1} \text{ est décroissante.}$$

(e) `def u(n):`
`s = 0`
`for k in range(1,n+1):`
`s = s+1/k`
`return s-np.log(n)`

2. (a) Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- (b) Posons $h(x) = x - \ln(1+x)$ pour $x \geq 0$. Alors

$$h(0) = 0, \quad h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$

La fonction h est croissante, donc $h(x) \geq h(0) = 0$. Ainsi,

$$\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

En appliquant cette inégalité à $x = 1/n$, la question a donne $v_{n+1} - v_n \geq 0$. Par conséquent,

$$(v_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante.}$$

- (c) La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 donne

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0).$$

Avec $x = 1/n$, on obtient

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent,

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

- (d) Les termes $v_{n+1} - v_n$ sont positifs et sont équivalents à $1/(2n^2)$. La série $\sum 1/n^2$ converge. Par comparaison par équivalent,

$$\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n) \text{ converge.}$$

On note sa somme γ .

(e) La somme est télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1.$$

Or $u_1 = 1$, donc $v_1 = u_1 - 1 = 0$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n.$$

Les sommes partielles de la série précédente tendent vers γ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \gamma.$$

3. (a) Puisque $u_n = v_n + 1/n$, que $v_n \rightarrow \gamma$ et que $1/n \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \gamma.$$

(b) La suite (v_n) est croissante et converge vers γ , donc $v_n \leq \gamma$. La suite (u_n) est décroissante et converge vers γ , donc $\gamma \leq u_n$. Ainsi,

$$v_n \leq \gamma \leq u_n.$$

Comme $u_n - v_n = 1/n$, il vient

$$0 \leq u_n - \gamma \leq u_n - v_n = \frac{1}{n}.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n, \quad |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$

(c) Le choix

$$n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

assure $n > 1/\varepsilon$, donc $1/n < \varepsilon$. D'après la question précédente,

$$|u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Le script calcule donc une valeur approchée de γ avec une erreur inférieure à la précision saisie. Ainsi,

$$\text{le nombre affiché approche } \gamma \text{ avec une erreur inférieure à } \varepsilon.$$

Partie II : étude d'une série

1. Pour $n \geq 1$, $a_n > 0$ et

$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

La série $\sum 1/n^2$ converge. Par comparaison par équivalent,

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge.}$$

2. (a) Dans la somme $\sum_{k=1}^{2n} 1/k$, on sépare les indices pairs des indices impairs :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}.$$

- (b) L'égalité

$$\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$$

équivalent à

$$1 = \alpha(2n-1) + \beta n = (2\alpha + \beta)n - \alpha.$$

L'identification donne $-\alpha = 1$ et $2\alpha + \beta = 0$. Ainsi,

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2, \quad a_n = -\frac{1}{n} + \frac{2}{2n-1}.$$

- (c) D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

3. (a) Par définition de u_n ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = u_n + \ln(n).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= u_{2n} + \ln(2n) - u_n - \ln(n) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2). \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2).$$

(b) Comme $u_{2n} \rightarrow \gamma$ et $u_n \rightarrow \gamma$,

$$u_{2n} - u_n + \ln(2) \longrightarrow \ln(2).$$

La question 2c donne alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2 \ln(2).$$

4. (a) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{1}{k} \text{ avec } k \text{ remplacé par } n+k \text{ donne } \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \frac{1}{1+k/n}.$$

En posant $j = n + k$, on obtient

$$\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n}.$$

(b) Le membre de gauche a déjà été calculé à la question 3a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} = u_{2n} - u_n + \ln(2) \longrightarrow \ln(2).$$

En utilisant encore la question 2c,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2 \ln(2).$$

Exercice 3

Partie I

1. Ici X compte, lors de trois lancers indépendants, les succès de probabilité $2/3$. Donc

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{2}{3}\right).$$

L'événement A est réalisé pour $X = 0$ ou $X = 2$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27}.$$

Ainsi,

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3), \quad \mathbb{P}(A) = 13/27.$$

2. Si X est pair, le gain est $10X$; s'il est impair, le gain est $-10X$. Les quatre valeurs possibles de X donnent donc

$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

La loi binomiale de X fournit

g	-30	-10	0	20
$\mathbb{P}(G = g)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{12}{27}$

3. La variable G prend un nombre fini de valeurs, donc son espérance existe et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G) &= -30\frac{8}{27} - 10\frac{6}{27} + 20\frac{12}{27} \\ &= \frac{-240 - 60 + 240}{27} = -\frac{20}{9}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(G) = -\frac{20}{9} < 0, \quad \text{le jeu n'est pas favorable au joueur.}$$

Partie II

1. (a) On a $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$. De plus, $Z = 1$ exactement sur A et $Z = 0$ sur l'événement contraire. Donc

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(Z = 0) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Ainsi,

$$Y(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad Z \hookrightarrow \mathcal{B}(1, \mathbb{P}(A)).$$

(b) Comme $Y = 2Z - 1$, les propriétés de l'espérance donnent

$$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(Z) - 1.$$

Or Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$, donc $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{P}(A)$. Finalement,

$$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1.$$

2. (a) X compte les succès lors de n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p . Donc

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

(b) Puisque $Y = (-1)^X$ et que X prend un nombre fini de valeurs,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

La formule du binôme donne

$$\mathbb{E}(Y) = ((1-p) - p)^n = (1-2p)^n.$$

3. En rapprochant les deux expressions de $\mathbb{E}(Y)$,

$$2\mathbb{P}(A) - 1 = (1-2p)^n.$$

Donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}.$$

4. On a

$$\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \iff (1 - 2p)^n \geq 0.$$

Si $p \leq 1/2$, alors $1 - 2p \geq 0$, et cette condition est satisfaite. Si $p > 1/2$, alors $1 - 2p < 0$, et sa puissance n est positive exactement lorsque n est pair. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ ou } n \text{ est pair} \right].$$

Partie III

1. Puisque Y vaut 1 lorsque X est pair et -1 lorsque X est impair,

$$G = 10XY.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(G) = 10\mathbb{E}(X(-1)^X) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \mathbb{P}(X = k),$$

d'où

$$\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \mathbb{P}(X = k).$$

2. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}.$$

Par conséquent,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

3. En utilisant la loi de X puis la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= 10 \sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= 10np \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

On pose $j = k - 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= -10np \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} \\ &= -10np((1-p) - p)^{n-1}. \end{aligned}$$

La dernière égalité provient de la formule du binôme. Ainsi,

$$\mathbb{E}(G) = -10np(1 - 2p)^{n-1}.$$

4. Comme $10np > 0$,

$$\mathbb{E}(G) \leq 0 \iff (1 - 2p)^{n-1} \geq 0.$$

Pour $p \leq 1/2$, cette condition et $\mathbb{P}(A) \geq 1/2$ sont toutes deux vérifiées. Pour $p > 1/2$, la première impose que $n - 1$ soit pair, donc que n soit impair, tandis que la seconde impose que n soit pair : elles ne peuvent pas être vérifiées ensemble. Donc

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}, \\ \mathbb{E}(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

5. (a) Pour $n = 1$, $f(x) = x$ est croissante sur $[0, 1/2]$.

Supposons $n \geq 2$. Pour $x \in [0, 1/2]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - 2x)^{n-1} - 2x(n-1)(1 - 2x)^{n-2} \\ &= (1 - 2x)^{n-2}(1 - 2nx). \end{aligned}$$

Le premier facteur est positif sur $[0, 1/2[$. Ainsi f' est positif sur $[0, 1/(2n)]$, nul en $1/(2n)$ et négatif sur $[1/(2n), 1/2]$. On obtient

x	0	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$	$\searrow 0$

Pour $n = 1$, le maximum vaut aussi $f(1/(2n)) = 1/2$.

(b) Le gain moyen du forain est $-\mathbb{E}(G) = 10nf(p)$. Il est donc maximal lorsque $f(p)$ est maximal. D'après la question précédente,

$$\boxed{p = \frac{1}{2n}}.$$

Partie IV

1. Ici X_i suit la loi binomiale de paramètres 2 et $1/4$. Le gain G_i vaut 0, -10 ou 20 selon que X_i vaut 0, 1 ou 2. Ainsi,

g	0	-10	20
$\mathbb{P}(G_i = g)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

Puis

$$\mathbb{E}(G_i) = -10\frac{6}{16} + 20\frac{1}{16} = -\frac{5}{2},$$

et

$$\mathbb{E}(G_i^2) = 100\frac{6}{16} + 400\frac{1}{16} = \frac{125}{2}.$$

La formule de König-Huygens donne

$$\mathbb{V}(G_i) = \mathbb{E}(G_i^2) - \mathbb{E}(G_i)^2 = \frac{125}{2} - \frac{25}{4} = \frac{225}{4}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(G_i) = -\frac{5}{2}, \quad \mathbb{V}(G_i) = \frac{225}{4}.$$

2. Le gain du forain est l'opposé de la totalité des gains algébriques des joueurs :

$$J = - \sum_{i=1}^{200} G_i.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(J) = - \sum_{i=1}^{200} \mathbb{E}(G_i) = -200 \left(-\frac{5}{2} \right) = 500.$$

Les participations étant indépendantes, les variables G_i sont indépendantes. D'après la propriété d'additivité de la variance pour des variables indépendantes, et puisque la multiplication par -1 ne change pas la variance,

$$\mathbb{V}(J) = \sum_{i=1}^{200} \mathbb{V}(G_i) = 200 \frac{225}{4} = 11250.$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(J) = 500, \quad \mathbb{V}(J) = 11250.$$

3. Si $J \leq 100$, alors $J - 500 \leq -400$, donc $|J - 500| \geq 400$. Ainsi,

$$[J \leq 100] \subset [|J - 500| \geq 400].$$

Par croissance d'une probabilité,

$$\mathbb{P}(J \leq 100) \leq \mathbb{P}(|J - 500| \geq 400).$$

4. L'inégalité de Bienaymé–Tchébychev affirme que, pour toute variable aléatoire T possédant une variance et tout réel $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|T - \mathbb{E}(T)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(T)}{a^2}.$$

On l'applique à $T = J$ et $a = 400$:

$$\mathbb{P}(|J - 500| \geq 400) \leq \frac{11250}{400^2} = \frac{11250}{160000} = \frac{9}{128}.$$

Avec la question précédente,

$$\mathbb{P}(J \leq 100) \leq \frac{9}{128}.$$

5. On a $9/128 < 1/10$. Par passage à l'événement contraire,

$$\mathbb{P}(J > 100) = 1 - \mathbb{P}(J \leq 100) \geq 1 - \frac{9}{128} = \frac{119}{128} > \frac{9}{10}.$$

Le risque que le gain ne dépasse pas 100 euros est donc inférieur à 10 %. Ainsi,

$$\text{le forain peut installer son stand selon le critère fixé.}$$