

Corrigé Ecricome 2019

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	4
Exercice 3	8

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2019.

Exercice 1

Partie A

1. (a) En effectuant le produit matriciel, on obtient

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puis

$$A^3 = A^2 A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Ainsi,

$$A^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = 0_3.$$

- (b) Soient λ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Alors

$$A^3 X = \lambda^3 X.$$

Or $A^3 = 0_3$ et $X \neq 0$, donc $\lambda^3 = 0$, puis $\lambda = 0$. On utilise ici la propriété suivante :

inclusion du spectre dans les racines d'un polynôme annulateur.

Elle donne

$$0 \text{ est l'unique valeur propre possible de } A.$$

- (c) Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la relation $AX = 0$ équivaut à

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0, \\ -x - y - 2z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont équivalentes. La première donne $x = 2y + z$; en la reportant dans la troisième, on trouve $3y + 3z = 0$, donc $y = -z$ et $x = -z$. Par conséquent,

$$X = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \dim \text{Ker}(A) = 1.$$

- (d) Si A était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux seraient nuls, puisque sa seule valeur propre possible est 0. On aurait alors $A = 0_3$, ce qui est faux. Ainsi,

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

2. (a) Supposons

$$\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0.$$

En lisant les trois coordonnées, il vient

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

La somme des deux dernières équations donne $3\lambda_3 = 0$, donc $\lambda_3 = 0$. La troisième donne alors $\lambda_1 = -\lambda_2$, puis la première donne $3\lambda_2 = 0$. Les trois scalaires sont nuls : la famille est libre. Comme elle contient trois vecteurs de l'espace E , de dimension 3, elle en constitue une base. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est une base de } E.}$$

- (b) Un calcul direct donne

$$Ae'_1 = 0, \quad Ae'_2 = e'_1, \quad Ae'_3 = e'_2.$$

La matrice de l'endomorphisme associé à A dans la base $\mathcal{B}'$ a donc pour colonnes les coordonnées respectives de ces trois images :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T.$$

Comme P est la matrice de passage correspondante, on obtient

$$\boxed{P^{-1}AP = T.}$$

3. (a) On remarque que

$$I - A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = M.$$

Par identification,

$$\boxed{\alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad M = I - A.}$$

- (b) En utilisant la question précédente et $P^{-1}AP = T$,

$$M' = P^{-1}MP = P^{-1}(I - A)P = I - T.$$

Ainsi,

$$\boxed{M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .}$$

(c) Comme $T^3 = 0_3$,

$$(I - T)(I + T + T^2) = I - T^3 = I.$$

Ainsi $I - T = M'$ est inversible. Une matrice semblable à une matrice inversible étant elle-même inversible, il vient

$$\boxed{M \text{ est inversible.}}$$

(d) Puisque $M - I = -A$ et $A^3 = 0_3$,

$$(M - I)^3 = -A^3 = 0_3.$$

En développant,

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0_3.$$

Après multiplication à gauche par M^{-1} , dont l'existence vient d'être établie,

$$M^2 - 3M + 3I - M^{-1} = 0_3.$$

Finalement,

$$\boxed{(M - I)^3 = 0_3, \quad M^{-1} = M^2 - 3M + 3I.}$$

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$, la formule du binôme de Newton s'applique car I et A commutent :

$$\begin{aligned} M^n &= (I - A)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k A^k \\ &= I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2, \end{aligned}$$

puisque $A^k = 0_3$ pour $k \geq 3$. Pour $n = -1$, le membre de droite devient

$$I + A + A^2.$$

Or

$$(I - A)(I + A + A^2) = I - A^3 = I,$$

donc cette expression est bien M^{-1} . Ainsi,

$$\boxed{M^n = I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{et la formule reste vraie pour } n = -1.}$$

Partie B

1. De $V^2 = T$, on déduit

$$VT = VV^2 = V^3 = V^2V = TV.$$

Donc

$$\boxed{VT = TV.}$$

2. (a) Comme $TE_1 = 0$, la commutation donne

$$T(VE_1) = V(TE_1) = 0.$$

Ainsi $VE_1 \in \text{Ker}(T)$. Or la résolution de $TX = 0$ donne $\text{Ker}(T) = \text{Vect}(E_1)$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{VE_1 = aE_1.}$$

(b) Puisque $TE_2 = E_1$,

$$T(VE_2 - aE_2) = TVE_2 - aTE_2 = VE_2 - aE_1 = VE_1 - aE_1 = 0.$$

Le vecteur $VE_2 - aE_2$ appartient donc à $\text{Ker}(T) = \text{Vect}(E_1)$. Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$VE_2 = bE_1 + aE_2.$$

(c) Comme $TE_3 = E_2$, on a

$$TVE_3 = VTE_3 = VE_2 = aE_1 + bE_2.$$

Par conséquent,

$$T(VE_3 - aE_3 - bE_2) = TVE_3 - aE_2 - bE_1 = 0.$$

Ainsi,

$$VE_3 - aE_3 - bE_2 \in \text{Ker}(T).$$

(d) Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$VE_3 = cE_1 + bE_2 + aE_3.$$

Les colonnes de V étant VE_1 , VE_2 et VE_3 , on obtient

$$V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

3. On calcule

$$V^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

L'égalité $V^2 = T$ imposerait d'abord $a^2 = 0$, donc $a = 0$, puis $2ab = 1$ en comparant les coefficients de la première ligne et de la deuxième colonne. Cette dernière égalité devient $0 = 1$, ce qui est impossible. L'hypothèse initiale est donc fautive :

$$\text{il n'existe aucune matrice } G \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } G^2 = A.$$

Exercice 2

Partie A

1. Les plus petites lignes de niveau visibles entourent le point $(1, 1)$ et portent des valeurs proches de 3. Les valeurs augmentent lorsqu'on s'éloigne de ce point. On peut donc conjecturer

$$f \text{ admet un minimum local en } (1, 1), \text{ de valeur approximative } 3.$$

2. (a) Sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$, $(x, y) \mapsto 1/x$ et $(x, y) \mapsto 1/y^2$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Les produits et sommes qui définissent f conservent cette propriété. Ainsi,

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

(b) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}, \quad \partial_2 f(x, y) = -\frac{2x}{y^3} + 2y.$$

Un point critique vérifie

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{x}{y^3}.$$

Comme x et y sont positifs, la première égalité donne $x = y$. La seconde donne $y^4 = x$. En combinant ces deux relations, $y^4 = y$, donc $y^3 = 1$, puis $x = y = 1$. Réciproquement, $(1, 1)$ annule bien les deux dérivées partielles. Ainsi,

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}, \quad \partial_2 f(x, y) = -\frac{2x}{y^3} + 2y, \quad A = (1, 1).$$

(c) On calcule

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = \frac{2}{x^3}, \quad \partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{2,1}^2 f(x, y) = -\frac{2}{y^3},$$

et

$$\partial_{2,2}^2 f(x, y) = \frac{6x}{y^4} + 2.$$

Au point $A = (1, 1)$, la matrice hessienne vaut donc

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = H.$$

(d) Cherchons les valeurs propres de H . Si $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre non nul associé à λ , le système

$$\begin{cases} (2 - \lambda)u - 2v = 0, \\ -2u + (8 - \lambda)v = 0 \end{cases}$$

conduit à

$$\lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0.$$

Les deux valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 5 - \sqrt{13} > 0, \quad \lambda_2 = 5 + \sqrt{13} > 0.$$

D'après les conditions suffisantes pour un extremum local, f admet donc un minimum local en A . Enfin,

$$f(1, 1) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Ainsi,

$$f \text{ admet en } A = (1, 1) \text{ un minimum local de valeur } 3.$$

Partie B

1. Pour $x > 0$,

$$h'_n(x) = nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} = \frac{n(x^{2n} - 1)}{x^{n+1}}.$$

Le dénominateur est positif. Si $0 < x < 1$, alors $x^{2n} < 1$ et $h'_n(x) < 0$; si $x > 1$, alors $x^{2n} > 1$ et $h'_n(x) > 0$. Ainsi,

$$h_n \text{ est strictement décroissante sur }]0, 1[\text{ et strictement croissante sur } [1, +\infty[.$$

2. La fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h_n(x) = +\infty, \quad h_n(1) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = +\infty.$$

Grâce aux variations établies à la question précédente et au

théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $h_n(x) = 4$ possède une unique solution dans $]0, 1[$ et une unique solution dans $]1, +\infty[$. Par conséquent,

$$\boxed{\exists! u_n \in]0, 1[, \exists! v_n \in]1, +\infty[\quad h_n(u_n) = h_n(v_n) = 4.}$$

3. (a) Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} - x^n + \frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{x^n} \\ &= x^n(x - 1) + \frac{1 - x}{x^{n+1}} \\ &= (x - 1) \left(x^n - \frac{1}{x^{n+1}} \right) \\ &= \frac{(x - 1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x - 1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}.}$$

(b) Comme $v_n > 1$, les deux facteurs du numérateur de l'expression précédente sont positifs. Donc

$$h_{n+1}(v_n) \geq h_n(v_n) = 4.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4.}$$

(c) La fonction h_{n+1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, avec $h_{n+1}(v_{n+1}) = 4$. Comme $h_{n+1}(v_n) \geq 4$, on obtient $v_n \geq v_{n+1}$. Par conséquent,

$$\boxed{(v_n)_{n \geq 1} \text{ est décroissante.}}$$

4. (a) La suite (v_n) est décroissante et minorée par 1. Le théorème de la limite monotone montre qu'elle converge vers un réel ℓ , et le passage à la limite dans $v_n \geq 1$ donne

$$\boxed{v_n \longrightarrow \ell \quad \text{avec} \quad \ell \geq 1.}$$

(b) Supposons $\ell > 1$ et posons $q = (1 + \ell)/2$. Alors $q > 1$. Comme $v_n \rightarrow \ell$, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $v_n \geq q$. Ainsi,

$$v_n^n \geq q^n \longrightarrow +\infty.$$

Or $h_n(v_n) = 4$, donc

$$v_n^n + \frac{1}{v_n^n} = 3.$$

Puisque $v_n^n > 1$, cette égalité impose $v_n^n < 3$, ce qui contredit la limite précédente. Ainsi,

$$\boxed{\ell > 1 \text{ est impossible.}}$$

- (c) D'après les deux questions précédentes, $\ell \geq 1$ et ℓ ne peut pas être strictement supérieur à 1. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

5. (a) Pour tout $n \geq 1$,

$$h_n(3) = 3^n + 1 + \frac{1}{3^n} > 4.$$

La fonction h_n étant strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et $h_n(v_n) = 4$, on en déduit $v_n < 3$. En particulier,

$$\forall n \geq 1, \quad v_n \leq 3.$$

- (b) `def h(n,x):`
`return x**n+1+1/x**n`

- (c) Sur $[1, 3]$, la fonction h_n est croissante. Lorsque $h_n(c) < 4$, la solution se trouve donc à droite de c ; sinon, elle se trouve à gauche.

```
def v(n):
    a = 1.0
    b = 3.0
    while b-a > 1e-5:
        c = (a+b)/2
        if h(n,c) < 4:
            a = c
        else:
            b = c
    return (a+b)/2
```

- (d) Le vecteur $\mathbf{X}$ contient les entiers de 1 à 20 et le coefficient d'indice $k-1$ de $\mathbf{Y}$ contient une valeur approchée de v_k^k . Les vingt points affichés ont tous une ordonnée voisine de 2,618034. On peut conjecturer que la suite (v_n^n) est constante. Ainsi,

le graphique représente (n, v_n^n) et suggère que $v_n^n \simeq 2,618034$ pour tout n .

- (e) Posons $z = v_n^n$. Comme $v_n > 1$, on a $z > 1$. La relation $h_n(v_n) = 4$ donne

$$z + 1 + \frac{1}{z} = 4,$$

soit, après multiplication par $z > 0$,

$$z^2 - 3z + 1 = 0.$$

Les solutions sont

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

La première est inférieure à 1, donc elle ne peut pas être égale à z . Ainsi,

$$\forall n \geq 1, \quad v_n^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

- (f) La question précédente donne

$$v_n = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{1/n}.$$

Pour toute constante $a > 0$, la suite $(a^{1/n})$ converge vers 1. On retrouve donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

Exercice 3

Partie A

1. Pour tout $t \geq 1$,

$$f(-t) = -\frac{1}{(-t)^3} = \frac{1}{t^3} = f(t).$$

Pour $-1 < t < 1$, on a aussi $-1 < -t < 1$, donc $f(-t) = 0 = f(t)$. Ces cas couvrent tous les réels. Par conséquent,

f est paire.

2. Pour $A > 1$,

$$\int_1^A f(t) dt = \int_1^A \frac{dt}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2}.$$

Cette expression possède une limite finie lorsque $A \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}.$$

3. (a) Soit $A > 1$. Dans l'intégrale sur $[-A, -1]$, effectuons le changement de variable $u = -t$. On a $dt = -du$ et, par parité de f , $f(-u) = f(u)$. Les bornes $t = -A$ et $t = -1$ deviennent respectivement $u = A$ et $u = 1$. Ainsi,

$$\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_A^1 f(-u)(-du) = \int_1^A f(u) du.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ et en utilisant la question précédente, on obtient

$$\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_1^A f(u) du, \quad \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

- (b) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement aux deux points -1 et 1 . De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^1 0 dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Elle vérifie donc les trois conditions caractérisant une densité :

f est une densité de probabilité.

4. (a) Si $x \leq -1$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x -\frac{1}{t^3} dt = \left[\frac{1}{2t^2} \right]_{-\infty}^x = \frac{1}{2x^2}.$$

Si $-1 < x < 1$, la densité est nulle entre -1 et x , donc $F_X(x) = F_X(-1) = 1/2$. Enfin, si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{1}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{2x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2}, & x \leq -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 < x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

(b) L'existence de l'espérance absolue se vérifie par

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t) dt &= 2 \int_1^{+\infty} \frac{t}{t^3} dt \\ &= 2 \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 2.\end{aligned}$$

L'espérance de X existe donc. Sur les deux demi-droites,

$$\int_1^{+\infty} tf(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{-1} tf(t) dt = -1.$$

La partie centrale apporte une contribution nulle. Par conséquent,

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X) = 0.}$$

(c) Le moment d'ordre deux demanderait la convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = 2 \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}.$$

Or cette dernière intégrale diverge. Le moment d'ordre deux n'existe donc pas et

$$\boxed{X \text{ n'admet pas de variance.}}$$

5. (a) Si $x < 1$, l'événement $[|X| \leq x]$ est impossible lorsque $x < 0$, et il a encore une probabilité nulle lorsque $0 \leq x < 1$, car X prend presque sûrement ses valeurs dans $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= \mathbb{P}(-x \leq X \leq x) \\ &= F_X(x) - F_X(-x) \\ &= 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x^2}, & x \geq 1, \end{cases} \quad Y \text{ est une variable à densité.}}$$

(b) On dérive la fonction de répartition là où elle est dérivable :

$$f'_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{2}{x^3}, & x > 1. \end{cases}$$

La valeur choisie au point 1 ne modifie pas la loi. On peut donc retenir

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}}$$

(c) On calcule

$$\mathbb{E}(Y) = \int_1^{+\infty} x \frac{2}{x^3} dx = 2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 2.$$

Ainsi,

$$\boxed{Y \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y) = 2.}$$

Partie B

1. (a) Lorsque $D = -1$, $Z = 0$, et lorsque $D = 1$, $Z = 1$. Ces deux valeurs sont équiprobables, donc Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Comme $D = 2Z - 1$,

$$\mathbb{E}(D) = 2\mathbb{E}(Z) - 1 = 0$$

et

$$\mathbb{V}(D) = 4\mathbb{V}(Z) = 4 \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Ainsi,

$$Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \mathbb{E}(D) = 0, \quad \mathbb{V}(D) = 1.$$

- (b) On a $|T| = |D|Y = Y$. Comme l'espérance de Y existe, celle de T existe. De plus, D et Y sont indépendantes, donc

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(DY) = \mathbb{E}(D)\mathbb{E}(Y) = 0 \times 2 = 0.$$

Ainsi,

$$T \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(T) = 0.$$

- (c) Les événements $[D = 1]$ et $[D = -1]$ forment un système complet d'événements. Les formules des probabilités totales donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \leq x) &= \mathbb{P}([D = 1] \cap [Y \leq x]) + \mathbb{P}([D = -1] \cap [-Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(D = 1)\mathbb{P}(Y \leq x) + \mathbb{P}(D = -1)\mathbb{P}(Y \geq -x), \end{aligned}$$

où l'indépendance de D et Y a été utilisée. Comme $\mathbb{P}(D = 1) = \mathbb{P}(D = -1) = 1/2$,

$$\mathbb{P}(T \leq x) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y \leq x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y \geq -x).$$

- (d) Si $x \leq -1$, alors $\mathbb{P}(Y \leq x) = 0$ et

$$\mathbb{P}(Y \geq -x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Si $-1 < x < 1$, on a $\mathbb{P}(Y \leq x) = 0$ et $\mathbb{P}(Y \geq -x) = 1$. Enfin, si $x \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad \mathbb{P}(Y \geq -x) = 1.$$

La question précédente donne donc

$$F_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2}, & x \leq -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 < x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

En particulier, T et X suivent la même loi.

2. (a) La fonction de répartition d'une variable uniforme sur $]0, 1[$ est

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

- (b) On a $V \geq 1$. Ainsi, $F_V(x) = 0$ pour $x < 1$. Pour $x \geq 1$, les quantités considérées sont positives et

$$\begin{aligned} [V \leq x] &= \left[\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x \right] \\ &= \left[1 - U \geq \frac{1}{x^2} \right] = \left[U \leq 1 - \frac{1}{x^2} \right]. \end{aligned}$$

Le réel $1 - 1/x^2$ appartient à $[0, 1[$, donc

$$F_V(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi,

$$F_V(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x^2}, & x \geq 1, \end{cases} \quad \text{et } V \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}$$

3. (a) `def D(n):`
`return 2*rd.randint(0,2,n)-1`

- (b) Les coefficients de **a** simulent D , ceux de **b** simulent une variable uniforme sur $]0, 1[$, et

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1 - \mathbf{b}}}$$

simule donc le produit DV . Comme V et Y suivent la même loi, avec une simulation indépendante des signes, les coefficients de **c** simulent la variable $T = DY$. Le nombre affiché est leur moyenne empirique. Comme $\mathbb{E}(T) = 0$, la loi faible des grands nombres montre que, pour n assez grand, cette moyenne est proche de 0. Ainsi,

c simule T et la valeur affichée est approximativement 0.