

Année : 2019

Concours : Ecricome

Option : Mathématiques appliquées

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques appliquées en vigueur depuis 2023.

Sommaire

Exercice 1 : Matrices nilpotentes et racines carrées **1**

Thèmes abordés : Réduction ; espaces vectoriels ; applications linéaires . 1

Exercice 2 : Extremum et suite implicite **2**

Thèmes abordés : Fonctions de deux variables ; suites ; Python 2

Exercice 3 : Variables à densité et simulation **4**

Thèmes abordés : Variables à densité ; probabilités discrètes ; Python . . 5

Dans les questions Python, on suppose que les commandes `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` et `import matplotlib.pyplot as plt` ont été exécutées.

Exercice 1

Matrices nilpotentes et racines carrées

Thèmes abordés : Réduction ; espaces vectoriels ; applications linéaires

On considère la matrice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie A

- 1)
 - a: Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
 - b: Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de A .
 - c: Déterminer une base et la dimension du noyau de A .
 - d: La matrice A est-elle diagonalisable ?
- 2) Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.
 - a: Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E .
 - b: On note P la matrice dont les colonnes sont e'_1, e'_2, e'_3 . Démontrer que

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3) On pose

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a: Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
- b: Déterminer la matrice $M' = P^{-1}MP$.
- c: En déduire que M est inversible.
- d: À l'aide de la question 1) a, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I , M et M^2 .
- e: À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n , en fonction des matrices I , A et A^2 .
Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucune matrice $G \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $G^2 = A$. Après conjugaison par P , on suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que

$$V^2 = T.$$

On note E_1, E_2, E_3 les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

- 1) Montrer que $VT = TV$.
- 2)
 - a: Montrer que VE_1 appartient au noyau de T . En déduire qu'il existe un réel a tel que $VE_1 = aE_1$.
 - b: Montrer que $VE_2 - aE_2$ appartient aussi au noyau de T . En déduire qu'il existe un réel b tel que $VE_2 = bE_1 + aE_2$.
 - c: Montrer que $TVE_3 = VTE_3 = aE_2 + bE_1$. En déduire que $VE_3 - aE_3 - bE_2$ appartient au noyau de T .
 - d: En déduire qu'il existe un réel c tel que

$$V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

- 3) Calculer V^2 en fonction de a, b et c , puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 2

Extremum et suite implicite

Thèmes abordés : Fonctions de deux variables ; suites ; Python

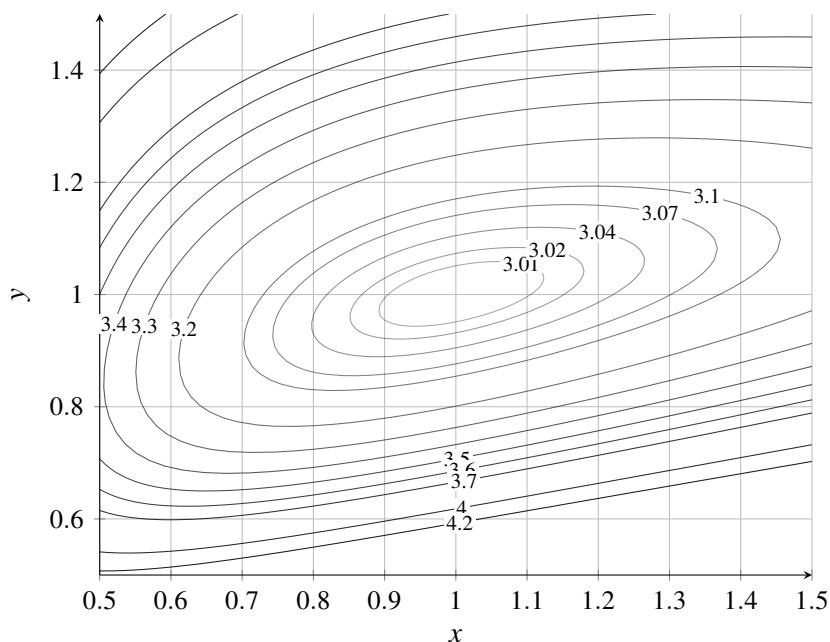
On considère la fonction f définie sur l'ouvert de $\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^{+*}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^{+*}, \quad f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}.$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction f , et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction f . Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A

- 1) On utilise Python pour tracer les lignes de niveau de la fonction f . On obtient le graphe suivant :



Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f , dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

- 2) **a:** Démontrer que f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^{++} \times \mathbf{R}^{++}$.
- b:** Calculer les dérivées partielles premières de f , puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A , que l'on déterminera.
- c:** Calculer les dérivées partielles secondes de f , puis démontrer que la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par : $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.
- d:** En déduire que la fonction f admet au point A un extremum local, préciser si cet extremum est un minimum, et donner sa valeur.

Partie B

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbf{R}^{++}$ par :

$$\forall x > 0 \quad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

- 1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- 2) En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
- 3) **a:** Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$

- b:** En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4$.
- c:** Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.
- 4) **a:** Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.

b: En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^n = +\infty$.

En déduire une contradiction.

c: Déterminer la limite de (v_n) .

5) a: Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3$

b: Écrire une fonction Python d'en-tête `def h(n, x) :` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbf{R}^{+*}$ en entrée.

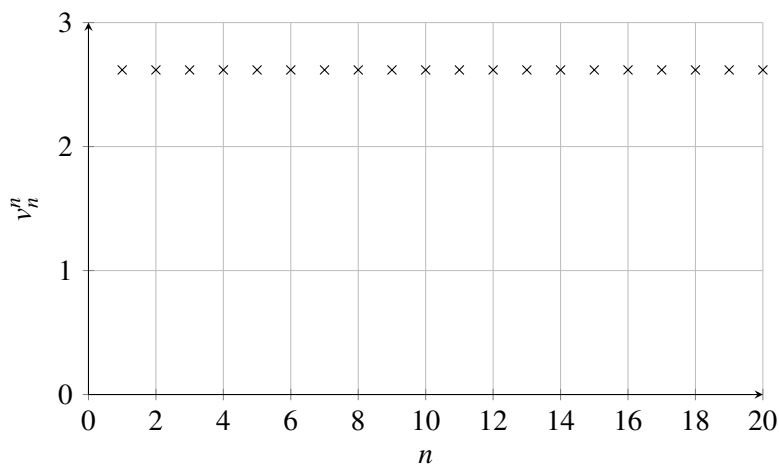
c: Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
def v(n):  
    a = 1.0  
    b = 3.0  
    while b - a > 1e-5:  
        c = (a + b) / 2  
        if h(n, c) < 4:  
            .....  
        else:  
            .....  
    return .....
```

d: À la suite de la fonction `v`, on écrit le code suivant :

```
X = np.arange(1, 21)  
Y = np.zeros(20)  
for k in range(1, 21):  
    Y[k-1] = v(k)**k  
plt.plot(X, Y, "x")  
plt.xlim(1, 20)  
plt.ylim(1, 3)  
plt.show()
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.

Que peut-on conjecturer ?

e: Montrer que : $\forall n \geq 1, \quad (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

f: Retrouver ainsi le résultat de la question 4) c.

Exercice 3

Variables à densité et simulation

Thèmes abordés : Variables à densité ; probabilités discrètes ; Python

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\frac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \end{cases}$$

1) Démontrer que la fonction f est paire.

2) Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge et calculer sa valeur.

3) **a:** À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on

$$\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_1^A f(u) du.$$

En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$ converge et donner sa valeur.

b: Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

4) On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X .

a: Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b: Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

c: La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

5) Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

a: Donner la fonction de répartition de Y , et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b: Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c: Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Partie B

- 1) Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y .

Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

a: Déterminer la loi de la variable $Z = \frac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D .

b: Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

c: Montrer que pour tout réel x , on a :

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2} P(Y \leq x) + \frac{1}{2} P(Y \geq -x)$$

d: En déduire la fonction de répartition de T .

- 2) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$ et V la variable aléatoire définie par :

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}.$$

a: Rappeler la fonction de répartition de U .

b: Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variable V et Y suivent la même loi.

- 3) **a:** Écrire une fonction en langage Python, d'en-tête `def D(n) :`, qui prend un entier $n \geq 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire D .

b: On considère le script suivant :

```
n = int(input("Entrer n : "))
a = D(n)
b = rd.random(n)
c = a / np.sqrt(1 - b)
print(np.sum(c) / n)
```

De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur c sont-ils une simulation ? Pour n assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.