

# Corrigé Ecricome 2020

Mathématiques appliquées

| Sommaire   |   |
|------------|---|
| Exercice 1 | 1 |
| Exercice 2 | 4 |
| Exercice 3 | 7 |

*Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2020.*

## Exercice 1

### Partie A : étude du cas où $a = 1$

1. Pour  $a = 1$ ,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un produit matriciel direct donne

$$(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Ainsi,

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (M - I_3)^2 = 0_3.}$$

2. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$  et soit  $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre associé. Alors

$$(M - I_3)^2 U = (\lambda - 1)^2 U = 0.$$

Comme  $U \neq 0$ ,  $(\lambda - 1)^2 = 0$ , donc  $\lambda = 1$ . De plus,

$$(M - I_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

donc 1 est effectivement valeur propre. Par inclusion du spectre dans les racines d'un polynôme annulateur,

$$\boxed{M \text{ possède l'unique valeur propre } 1.}$$

3. Puisque 0 n'est pas valeur propre de  $M$ ,  $M$  est inversible.

Si  $M$  était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux seraient égaux à son unique valeur propre 1. Cette matrice serait  $I_3$ , ce qui entraînerait  $M = I_3$ , contrairement à l'expression de  $M$ . Ainsi,

$$\boxed{M \text{ est inversible mais n'est pas diagonalisable.}}$$

### Partie B : étude du cas où $a = 0$

4. On a

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$(M - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - y - z = 0.$$

En posant  $y = s$  et  $z = t$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices colonnes affichées ne sont pas proportionnelles. Donc

$$1 \text{ est valeur propre et } E_1(M) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \dim E_1(M) = 2.$$

5. Un calcul direct donne

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de  $M$  contient donc une matrice colonne non nulle. Ainsi,

$$M \text{ n'est pas inversible.}$$

6. Résolvons  $MU = 0$ . Le système est

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ x - z = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Il équivaut à  $x = y = z$ , donc

$$E_0(M) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \dim E_0(M) = 1.$$

Les deux matrices colonnes obtenues à la question 4 et la matrice colonne  $(1, 1, 1)^t$  sont linéairement indépendantes : si

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

les trois lignes donnent  $r + s + t = 0$ ,  $r + t = 0$ ,  $s + t = 0$ , puis  $r = s = t = 0$ . Elles forment donc une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres. Dans cette base, la matrice représentant l'application associée à  $M$  est diagonale, de coefficients  $1, 1, 0$ . Il n'existe donc pas d'autre valeur propre. Finalement,

$$\text{Sp}(M) = \{0, 1\}, \quad \dim E_0(M) = 1, \quad \dim E_1(M) = 2, \quad M \text{ est diagonalisable.}$$

### Partie C : étude du cas où $a \neq 0$ et $a \neq 1$

7. Supposons  $xu + yv + zw = 0$ . En lisant les trois lignes, on obtient

$$x + y + z = 0, \quad x + z = 0, \quad x + y = 0.$$

Les deux dernières égalités donnent  $y = z = -x$ , puis la première donne  $-x = 0$ . Ainsi  $x = y = z = 0$  : la famille  $(u, v, w)$  est libre. Elle contient trois éléments de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , espace de dimension trois, donc c'est une base. Par conséquent,

$$P \text{ est inversible.}$$

8. Les produits matrice-colonne donnent

$$Mu = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = au, \quad Mv = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v.$$

Donc

$$\boxed{Mu = au \quad \text{et} \quad Mv = v.}$$

9. On calcule

$$Mw = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Or

$$\alpha v + \beta w = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

L'identification des lignes donne  $\alpha = a$  et  $\beta = 1$ . Ainsi,

$$\boxed{Mw = av + w, \quad \alpha = a, \quad \beta = 1.}$$

10. Les colonnes de  $T = P^{-1}MP$  sont les coordonnées respectives de  $Mu, Mv, Mw$  dans la base  $(u, v, w)$ . Les deux questions précédentes donnent donc

$$\boxed{T = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Les égalités  $Mu = au$  et  $Mv = v$  montrent déjà que  $a$  et  $1$  sont valeurs propres. Comme  $M$  et  $T$  sont semblables, étudions les sous-espaces propres de  $T$ .

Pour la valeur propre  $a$ , le système  $(T - aI_3)U = 0$  s'écrit

$$(1 - a)y + az = 0, \quad (1 - a)z = 0.$$

Puisque  $a \neq 1$ , on obtient  $z = 0$ , puis  $y = 0$ , tandis que  $x$  est libre. Ainsi  $\dim E_a(M) = 1$ .

Pour la valeur propre  $1$ , le système  $(T - I_3)U = 0$  s'écrit

$$(a - 1)x = 0, \quad az = 0.$$

Comme  $a \neq 1$  et  $a \neq 0$ ,  $x = z = 0$ , tandis que  $y$  est libre. Ainsi  $\dim E_1(M) = 1$ .

Enfin, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$ , les lignes du système  $(T - \lambda I_3)U = 0$  montrent que, lorsque  $\lambda \neq a$  et  $\lambda \neq 1$ , on a successivement  $x = 0$ ,  $z = 0$ , puis  $y = 0$ , ce qui est impossible pour un vecteur propre. Les deux valeurs précédentes sont donc les seules. Comme on ne peut obtenir que deux vecteurs propres linéairement indépendants, ils ne peuvent constituer une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . Par conséquent,

$$\boxed{\text{Sp}(M) = \{a, 1\}, \quad \dim E_a(M) = \dim E_1(M) = 1, \quad M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

## Exercice 2

### Partie A : étude de la fonction $f_n$

1. La fonction

$$t \mapsto \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}$$

est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , car son dénominateur ne s'y annule pas. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\forall x \geq 0, \quad f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}.$$

2. Le dénominateur de  $f'_n(x)$  est positif. Son numérateur est négatif pour  $0 \leq x < 1$ , nul pour  $x = 1$  et positif pour  $x > 1$ . Par conséquent,

$$f_n \text{ est strictement décroissante sur } [0, 1] \text{ puis strictement croissante sur } [1, +\infty[.$$

3. La fonction  $f'_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Pour  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} f''_n(x) &= \frac{2nx^{2n-1}(x+1) - (x^{2n} - 1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(2n-1)x^{2n} + 2nx^{2n-1} + 1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Tous les termes du numérateur sont positifs ou nuls et le dernier vaut 1. Ainsi  $f''_n(x) > 0$  pour tout  $x \geq 0$ . Donc :

$$f''_n(x) = \frac{(2n-1)x^{2n} + 2nx^{2n-1} + 1}{(x+1)^2} > 0, \quad f_n \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+.$$

4. (a) Pour  $t \geq 1$ , posons  $h = t^2 - 1 \geq 0$ . La formule du binôme donne

$$t^{2n} = (1+h)^n = 1 + nh + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k \geq 1 + nh.$$

Ainsi,

$$\forall t \geq 1, \quad t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

- (b) Pour  $t \in [1, x]$ , avec  $x \geq 1$ , la question précédente donne

$$\frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq n \frac{t^2 - 1}{t + 1} = n(t - 1).$$

En intégrant sur le segment  $[1, x]$ ,

$$f_n(x) - f_n(1) \geq n \int_1^x (t - 1) dt = \frac{n}{2}(x - 1)^2.$$

Donc

$$\forall x \geq 1, \quad f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x - 1)^2.$$

(c) Le membre de droite tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Par comparaison,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

5. Par définition,

$$f_n(0) = \int_0^0 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = 0.$$

Pour  $t \in [0, 1[$ ,  $t^{2n} - 1 < 0$  et  $t + 1 > 0$ . La fonction intégrée est continue, négative sur  $[0, 1[$  et non nulle, donc son intégrale sur  $[0, 1]$  est strictement négative. Ainsi,

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_n(1) < 0.$$

6. Sur  $[0, 1]$ ,  $f_n$  décroît de 0 à une valeur strictement négative : elle ne s'y annule donc qu'en 0. Sur  $[1, +\infty[$ ,  $f_n$  est continue, strictement croissante,  $f_n(1) < 0$  et  $f_n(x) \rightarrow +\infty$ . Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un zéro dans  $]1, +\infty[$ , et la stricte croissance en assure l'unicité. Par conséquent,

$$\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ possède une unique solution strictement positive } x_n, \text{ et } x_n > 1.$$

## Partie B : étude de la suite implicite

7. Pour  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2n+2} - t^{2n}}{t + 1} dt \\ &= \int_0^x t^{2n}(t - 1) dt \\ &= \left[ \frac{t^{2n+2}}{2n+2} - \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left( \frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

8. (a) Si  $x \geq (2n+2)/(2n+1)$ , alors

$$\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \geq 0.$$

Comme  $x^{2n+1} \geq 0$ , la question 7 donne

$$\forall x \geq \frac{2n+2}{2n+1}, \quad f_{n+1}(x) \geq f_n(x).$$

(b) L'inégalité admise donne  $x_n \geq (2n+2)/(2n+1)$ . La question précédente s'applique donc en  $x_n$ , et, puisque  $f_n(x_n) = 0$ ,

$$f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n) = 0.$$

(c) On sait que  $x_n > 1$ . La fonction  $f_{n+1}$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ , s'annule en  $x_{n+1}$ , et  $f_{n+1}(x_n) \geq 0$ . Par conséquent  $x_n \geq x_{n+1}$ . La suite  $(x_n)$  est décroissante et minorée par 1. Le théorème de la limite monotone donne

$$(x_n) \text{ est décroissante et converge vers un réel } \ell \geq 1.$$

9. (a) Pour  $t \in [0, 1]$ ,  $0 \leq t^{2n} \leq 1$ , donc

$$-\frac{1}{t+1} \leq \frac{t^{2n}-1}{t+1} \leq 0.$$

En intégrant sur  $[0, 1]$ , on obtient

$$-\int_0^1 \frac{dt}{t+1} \leq f_n(1) \leq 0,$$

soit

$$\boxed{-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0.}$$

- (b) La question 4.b appliquée à  $x_n > 1$  donne

$$0 = f_n(x_n) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x_n - 1)^2.$$

Ainsi,

$$0 \leq (x_n - 1)^2 \leq -\frac{2}{n}f_n(1) \leq \frac{2\ln(2)}{n}.$$

Comme  $x_n - 1 \geq 0$ , on peut prendre les racines carrées :

$$0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}.$$

Le membre de droite tend vers 0. Le théorème d'encadrement donne donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.}$$

### Partie C : étude de la fonction $G_n$

10. Puisque  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ , le produit  $G_n(x, y) = f_n(x)f_n(y)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ . Ses dérivées partielles premières sont

$$\boxed{\partial_1 G_n(x, y) = f'_n(x)f_n(y), \quad \partial_2 G_n(x, y) = f_n(x)f'_n(y).}$$

11. Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a  $f'_n(z) = 0$  si et seulement si  $z = 1$ , et  $f_n(z) = 0$  si et seulement si  $z = x_n$ . Un point critique vérifie

$$f'_n(x)f_n(y) = 0, \quad f_n(x)f'_n(y) = 0.$$

Si  $x = 1$ , alors  $f_n(x) = f_n(1) \neq 0$ , donc  $y = 1$ . Si  $f_n(y) = 0$ , alors  $y = x_n$ ; comme  $f'_n(y) \neq 0$ , la seconde égalité impose  $x = x_n$ . On a ainsi épuisé les possibilités, et

$$\boxed{\text{les points critiques de } G_n \text{ sont } (1, 1) \text{ et } (x_n, x_n).}$$

12. La matrice hessienne en un point quelconque vaut

$$\nabla^2 G_n(x, y) = \begin{pmatrix} f''_n(x)f_n(y) & f'_n(x)f'_n(y) \\ f'_n(x)f'_n(y) & f_n(x)f''_n(y) \end{pmatrix}.$$

Comme  $f_n(x_n) = 0$ ,

$$\nabla^2 G_n(x_n, x_n) = \begin{pmatrix} 0 & f'_n(x_n)^2 \\ f'_n(x_n)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs,  $f'_n(1) = 0$  et, d'après la question 3,

$$f''_n(1) = \frac{(2n-1) + 2n+1}{4} = n.$$

Donc

$$\nabla^2 G_n(x_n, x_n) = \begin{pmatrix} 0 & f'_n(x_n)^2 \\ f'_n(x_n)^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 G_n(1, 1) = \begin{pmatrix} n f_n(1) & 0 \\ 0 & n f_n(1) \end{pmatrix}.$$

13. Posons  $c = f'_n(x_n)^2$ . Comme  $x_n > 1$ ,  $f'_n(x_n) > 0$ , donc  $c > 0$ . On vérifie directement

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La hessienne possède donc une valeur propre positive et une valeur propre négative. D'après les conditions suffisantes pour un extremum local,

$$G_n \text{ n'admet pas d'extremum local en } (x_n, x_n).$$

14. Les deux valeurs propres de  $\nabla^2 G_n(1, 1)$  valent  $n f_n(1)$ . Or  $n > 0$  et  $f_n(1) < 0$ , donc elles sont toutes deux strictement négatives. D'après les conditions suffisantes pour un extremum local,

$$G_n \text{ admet un maximum local en } (1, 1).$$

### Exercice 3

1. Pour  $A > a$ , une primitive de  $t \mapsto t^{-n}$  est  $t \mapsto t^{1-n}/(1-n)$ . Ainsi

$$\int_a^A \frac{dt}{t^n} = \frac{a^{1-n} - A^{1-n}}{n-1}.$$

Comme  $n \geq 2$ ,  $A^{1-n} \rightarrow 0$  lorsque  $A \rightarrow +\infty$ . L'intégrale converge donc et

$$I_n(a) = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}.$$

2. (a) La fonction  $f$  est positive et continue sur  $\mathbb{R}$ , sauf éventuellement en  $a$ . De plus, d'après la question 1,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^4} = 3a^3 I_4(a) = 1.$$

Ainsi,

$$f \text{ est une densité de probabilité.}$$

(b) Si  $x < a$ ,  $F_X(x) = 0$ . Si  $x \geq a$ ,

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{3a^3}{t^4} dt = \left[ -\frac{a^3}{t^3} \right]_a^x = 1 - \frac{a^3}{x^3}.$$

Donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 - \frac{a^3}{x^3}, & x \geq a. \end{cases}$$

- (c) L'intégrale définissant l'espérance converge puisque, d'après la question 1,  $I_3(a)$  converge. Puis

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^{+\infty} t \frac{3a^3}{t^4} dt = 3a^3 I_3(a) = \frac{3a}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{3a}{2}.$$

- (d) De même,  $I_2(a)$  converge, donc le moment d'ordre deux existe et

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_a^{+\infty} t^2 \frac{3a^3}{t^4} dt = 3a^3 I_2(a) = 3a^2.$$

La formule de König–Huygens donne

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 3a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{3a^2}{4}.$$

3. (a) Comme  $U(\Omega) = ]0, 1]$ ,  $U^{1/3} \in ]0, 1]$ . La transformation  $u \mapsto a/u^{1/3}$  prend la valeur  $a$  en 1, et toute valeur supérieure ou égale à  $a$  est obtenue pour un unique  $u \in ]0, 1]$ . Ainsi,

$$\boxed{Y(\Omega) = [a, +\infty[.}$$

- (b) Si  $x < a$ ,  $\mathbb{P}(Y \leq x) = 0$ . Si  $x \geq a$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}\left(\frac{a}{U^{1/3}} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(U \geq \frac{a^3}{x^3}\right) \\ &= 1 - \frac{a^3}{x^3}, \end{aligned}$$

car  $U$  suit la loi uniforme sur  $]0, 1]$ . Ainsi  $F_Y = F_X$ , donc

$$\boxed{Y \text{ et } X \text{ suivent la même loi.}}$$

- (c) On utilise `1 - rd.random((m,n))`, dont les coefficients appartiennent à  $]0, 1]$ .

```
def simulX(a,m,n):
    U = 1-rd.random((m,n))
    return a/(U**(1/3))
```

4. (a) D'après la fonction de répartition,

$$\mathbb{P}(X > 2a) = 1 - F_X(2a) = \frac{a^3}{(2a)^3} = \frac{1}{8}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X > 2a) = \frac{1}{8}.$$

(b) Puisque  $[X > 6a]$  est inclus dans  $[X > 2a]$ ,

$$\mathbb{P}_{[X > 2a]}(X > 6a) = \frac{\mathbb{P}(X > 6a)}{\mathbb{P}(X > 2a)} = \frac{1/216}{1/8} = \frac{1}{27}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_{[X > 2a]}(X > 6a) = \frac{1}{27}.$$

(c) Le quotient renvoyé est la fréquence de  $[X > 6a]$  parmi les réalisations vérifiant  $[X > 2a]$ .

```
def verification(a,N):
    s1 = 0
    s2 = 0
    X = simulX(a,1,N)[0]
    for k in range(N):
        if X[k] > 2*a:
            s1 = s1+1
            if X[k] > 6*a:
                s2 = s2+1
    if s1 > 0:
        return s2/s1
```

5. (a) Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(V_n) = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \frac{2}{3n} n \frac{3a}{2} = a.$$

Donc

$$V_n \text{ est un estimateur sans biais de } a.$$

(b) Comme  $V_n$  est sans biais, son risque quadratique est sa variance. Les variables  $X_1, \dots, X_n$  étant indépendantes,

$$\begin{aligned} R_a(V_n) &= \mathbb{V}(V_n) = \frac{4}{9n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) \\ &= \frac{4}{9n^2} n \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{3n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$R_a(V_n) = \frac{a^2}{3n}.$$

6. (a) Si  $x < a$ ,  $F_{W_n}(x) = 0$ . Si  $x \geq a$ , l'indépendance des variables donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_n > x) &= \mathbb{P}([X_1 > x] \cap \dots \cap [X_n > x]) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k > x) = \left( \frac{a^3}{x^3} \right)^n. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 - \frac{a^{3n}}{x^{3n}}, & x \geq a. \end{cases}$$

Cette fonction de répartition est continue sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sauf éventuellement en  $a$ ; sa dérivée donne donc une densité de  $W_n$ . Ainsi,

$W_n$  est une variable aléatoire à densité.

(b) En dérivant la fonction de répartition là où elle est dérivable, on obtient

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ \frac{3n a^{3n}}{t^{3n+1}}, & t \geq a. \end{cases}$$

(c) Puisque  $3n \geq 3$ , l'intégrale  $I_{3n}(a)$  converge, et

$$\mathbb{E}(W_n) = 3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^{3n}} = 3na^{3n} I_{3n}(a) = \frac{3n}{3n-1}a.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(\lambda_n W_n) = a \iff \lambda_n \frac{3n}{3n-1}a = a.$$

Comme  $a > 0$ , l'unique solution est

$$\mathbb{E}(W_n) = \frac{3n}{3n-1}a, \quad \lambda_n = \frac{3n-1}{3n}.$$

(d) Comme  $3n-1 \geq 2$ , le moment d'ordre deux existe et

$$\mathbb{E}(W_n^2) = 3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^{3n-1}} = \frac{3n}{3n-2}a^2.$$

L'estimateur  $\lambda_n W_n$  étant sans biais,

$$\begin{aligned} R_a(\lambda_n W_n) &= \mathbb{E}((\lambda_n W_n - a)^2) \\ &= \lambda_n^2 \mathbb{E}(W_n^2) - a^2 \\ &= \frac{(3n-1)^2}{9n^2} \frac{3n}{3n-2} a^2 - a^2 \\ &= a^2 \frac{(3n-1)^2 - 3n(3n-2)}{3n(3n-2)} = \frac{a^2}{3n(3n-2)}. \end{aligned}$$

Donc

$$R_a(\lambda_n W_n) = \frac{a^2}{3n(3n-2)}.$$

7. (a) Chaque ligne de  $X$  contient une réalisation indépendante de  $X_1, \dots, X_n$ . On applique donc la définition de  $V_n$  à chacune des  $m$  lignes.

```
def simulV(a,m,n):
    X = simulX(a,m,n)
    V = np.zeros(m)
    for k in range(m):
        V[k] = 2*np.sum(X[k,:])/(3*n)
    return V
```

- (b) Le graphique comporte 20 réalisations, centrées autour de  $a = 5$ , avec  $n = 100$ . De plus,

$$R_a(\lambda_n W_n) = \frac{a^2}{3n(3n-2)} < \frac{a^2}{3n} = R_a(V_n).$$

Les réalisations de  $\lambda_n W_n$  sont donc celles qui sont le moins dispersées : elles sont représentées par le marqueur "+"; les réalisations de  $V_n$  sont représentées par le marqueur "x".

```
W = simulW(5,20,100)
V = simulV(5,20,100)
plt.plot(W, "+")
plt.plot(V, "x")
plt.show()
```