

Année : 2020

Concours : Ecricome

Option : Mathématiques appliquées

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques appliquées en vigueur depuis 2023.

Sommaire

Exercice 1 : Réduction d'une famille de matrices	1
<i>Thèmes abordés : Réduction ; espaces vectoriels ; applications linéaires</i>	1
Exercice 2 : Suite implicite et fonction de deux variables	2
<i>Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; suites ; intégrales ; fonctions de deux variables</i>	2
Exercice 3 : Loi de Pareto et estimation	3
<i>Thèmes abordés : Variables à densité ; estimations ; Python</i>	3

Dans les questions Python, on suppose que les commandes `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` et `import matplotlib.pyplot as plt` ont été exécutées.

Exercice 1

Réduction d'une famille de matrices

Thèmes abordés : Réduction ; espaces vectoriels ; applications linéaires

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M , puis calculer $(M - I_3)^2$.
2. En déduire l'unique valeur propre possible de M .
3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M , et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.
5. Démontrer que M n'est pas inversible.
6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M , et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.

On pose

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et on note P la matrice dont les colonnes sont u, v, w .

7. Démontrer que la matrice P est inversible.
8. Calculer Mu et Mv .
9. Calculer Mw et trouver deux réels α et β tels que $Mw = \alpha v + \beta w$.

10. Déterminer la matrice $T = P^{-1}MP$.

11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M , et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Suite implicite et fonction de deux variables

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; suites ; intégrales ; fonctions de deux variables

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geq 0, f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

2. Étudier les variations de f_n .

3. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4. a) Démontrer : $\forall t \geq 1, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

b) Montrer alors : $\forall x \geq 1, f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x - 1)^2$.

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n) , où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.

On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{2n + 2}{2n + 1}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n + 2} - \frac{1}{2n + 1} \right)$$

8. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq \frac{2n+2}{2n+1}, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
 b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \geq 0$.
 c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
9. a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$.
 b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4.b) de la partie A, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$G_n : (x, y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n .
12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1, 1)$.
13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1, 1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Exercice 3

Loi de Pareto et estimation

Thèmes abordés : Variables à densité ; estimations ; Python

Pour tout estimateur T_n du paramètre a , son *risque quadratique* est défini par

$$R_a(T_n) = \mathbb{E}[(T_n - a)^2],$$

lorsque cette espérance existe.

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

- a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.
- b) Donner la fonction de répartition de X .
- c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.
- d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\frac{3a^2}{4}$.
3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose : $Y = \frac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

- a) Déterminer $Y(\Omega)$.
- b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.
- c) Écrire une fonction Python d'en-tête `extttdef simulX(a, m, n)` : prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X . Ces réels seront choisis de façon indépendante. À cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction `exttttrd.random((m,n))` renvoie un tableau de taille *mimesn* dont les coefficients sont des réalisations indépendantes de la loi uniforme sur $[0, 1]$.
4. a) Calculer $\mathbb{P}(X > 2a)$.
- b) Calculer $\mathbb{P}_{[X > 2a]}(X > 6a)$.
- c) On suppose que la fonction Python de la question 3.a) a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```

1  a = 10
2  N = 100000
3  s1 = 0
4  s2 = 0
5  X = simulX(a, 1, N)[0]
6  for k in range(N):
7      if .....:
8          s1 += 1
9          if X[k] > 6*a:
10             .....
11 if s1 > 0:
12     print(.....)

```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a .

Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X .

5. On pose : $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k$.

- a) Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a .

b) Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n}$.

6. On pose : $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.

b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.

Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a .

d) Calculer le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n(3n-2)}$.

7. On rappelle que :

- si A est un tableau NumPy, $A[i, :]$ renvoie sa ligne d'indice i ;
- $\text{np.sum}(A)$ renvoie la somme des coefficients de A ;
- $\text{plt.plot}(X, "+")$ et $\text{plt.plot}(X, "x")$ représentent les coefficients de X avec deux marqueurs distincts.

a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments :

```

1 def simulV(a, m, n):
2     X = simulX(a, m, n)
3     V = np.zeros(m)
4     for k in range(.....):
5         V[k] = .....
6     return V

```

Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire simulW permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```

1 W = simulW(..., ..., ...)
2 V = simulV(..., ..., ...)
3 plt.plot(..., "+")
4 plt.plot(..., "x")
5 plt.show()

```

On justifiera la réponse pour les deux dernière lignes.

