

Corrigé Ecricome 2021

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	4
Exercice 3	7

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2021.

Exercice 1

Partie A

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha I_3)(\alpha I_3 + I_3)(\alpha I_3 + 2I_3) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)I_3.$$

Cette matrice est nulle si et seulement si $\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) = 0$. Ainsi,

$$\alpha I_3 \in \mathcal{A} \iff \alpha \in \{0, -1, -2\}.$$

2. Les matrices $-I_3$ et $-2I_3$ appartiennent à $\mathcal{A}$ d'après la question précédente, mais leur somme $-3I_3$ n'y appartient pas. La stabilité par addition n'est donc pas vérifiée. Par conséquent,

$$\mathcal{A} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

3. (a) Un calcul direct donne

$$BX_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2X_1, \quad BX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -X_2.$$

Donc

$$BX_1 = -2X_1 \quad \text{et} \quad BX_2 = -X_2.$$

- (b) Les matrices colonnes X_1 et X_2 étant non nulles, -2 et -1 sont des valeurs propres de B .

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$$(B + 2I_3)X = 0 \iff x - y + z = 0.$$

Ainsi, en posant $y = x + z$,

$$X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices colonnes affichées sont libres, donc

$$\text{Ker}(B + 2I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

De même,

$$(B + I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \\ x - y = 0, \end{cases} \iff x = y = z.$$

Finalement,

$$\begin{array}{l} -2 \text{ et } -1 \text{ sont valeurs propres de } B, \\ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Ker}(B + 2I_3), \\ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Ker}(B + I_3). \end{array}$$

(c) Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de P sont les trois matrices colonnes propres trouvées à la question précédente. Vérifions qu'elles sont libres. Si

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

alors $a+c=0$, $a+b+c=0$ et $b+c=0$. La deuxième égalité et les deux autres donnent $c=0$, puis $a=b=0$. Ces trois colonnes forment donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, si bien que P est inversible. Les relations propres donnent $BP = PD$, puis $B = PDP^{-1}$. Ainsi,

$$B \text{ est diagonalisable et } B = PDP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Les coefficients diagonaux de $D(D+I_3)(D+2I_3)$ sont de la forme $\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$, avec $\lambda \in \{-2, -1\}$. Ils sont donc tous nuls et $D \in \mathcal{A}$.

Par ailleurs, comme $B = PDP^{-1}$,

$$\begin{aligned} B(B+I_3)(B+2I_3) &= PDP^{-1}P(D+I_3)P^{-1}P(D+2I_3)P^{-1} \\ &= P(D(D+I_3)(D+2I_3))P^{-1} = 0_3. \end{aligned}$$

Donc

$$D \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad B \in \mathcal{A}.$$

4. Comme M est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$. Tous les coefficients diagonaux de D appartiennent à $\{0, -1, -2\}$, donc $D(D+I_3)(D+2I_3) = 0_3$. Le même calcul que dans la question précédente donne

$$M(M+I_3)(M+2I_3) = P(D(D+I_3)(D+2I_3))P^{-1} = 0_3.$$

Par conséquent,

$$M \in \mathcal{A}.$$

Partie B

5. L'égalité qui définit $\mathcal{A}$ montre que le polynôme

$$Q(X) = X(X+1)(X+2)$$

annule M . D'après l'inclusion du spectre dans les racines d'un polynôme annulateur, toute valeur propre de M est une racine de Q . Ainsi,

$$Q(X) = X(X+1)(X+2) \text{ annule } M \quad \text{et} \quad \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}.$$

6. Choisissons des matrices colonnes propres U_0, U_{-1}, U_{-2} associées respectivement aux trois valeurs propres distinctes $0, -1, -2$. La propriété de liberté des matrices colonnes propres associées à des valeurs propres distinctes montre que cette famille est libre. Elle contient trois éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc c'en est une base. La matrice de M dans cette base est diagonale. Ainsi,

$$M \text{ est diagonalisable.}$$

7. (a) Comme 0 n'est pas valeur propre de M , l'équation $MX = 0$ n'admet que la solution nulle. Le théorème du rang donne $\text{rg}(M) = 3$, donc M est inversible. De même, -2 n'est pas valeur propre de M , donc $M + 2I_3$ est inversible.

Or les trois facteurs de l'égalité $M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3$ commutent. En multipliant cette égalité par M^{-1} puis par $(M + 2I_3)^{-1}$, on obtient $M + I_3 = 0_3$. Par conséquent,

$$\boxed{M = -I_3.}$$

- (b) Si $\text{Sp}(M) = \{-2\}$, les matrices M et $M + I_3$ sont inversibles. L'égalité définissant $\mathcal{A}$ donne alors $M + 2I_3 = 0_3$. Si $\text{Sp}(M) = \{0\}$, les matrices $M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles, et la même égalité donne $M = 0_3$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Sp}(M) = \{-2\} \Rightarrow M = -2I_3, \quad \text{Sp}(M) = \{0\} \Rightarrow M = 0_3.}$$

8. Si M n'admet aucune valeur propre, alors 0, -1 et -2 ne sont pas valeurs propres. Comme à la question précédente, le théorème du rang montre successivement que M , $M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles. Leur produit serait alors inversible, ce qui est impossible puisqu'il est égal à 0_3 . Ainsi,

$$\boxed{\text{une matrice } M \in \mathcal{A} \text{ admet au moins une valeur propre.}}$$

9. On suppose $\text{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ et M non diagonalisable.

- (a) Puisque 0 n'est pas valeur propre de M , la matrice M est inversible. En multipliant l'égalité définissant $\mathcal{A}$ par M^{-1} , on obtient

$$(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3.$$

Les deux facteurs commutent puisqu'ils sont construits avec M et I_3 . Ainsi,

$$\boxed{(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3 \quad \text{et} \quad (M + 2I_3)(M + I_3) = 0_3.}$$

- (b) Puisque -1 est valeur propre, il existe une matrice colonne non nulle dans $\text{Ker}(M + I_3)$. De même, -2 étant valeur propre, $\text{Ker}(M + 2I_3)$ contient une matrice colonne non nulle. Donc

$$\boxed{\dim \text{Ker}(M + I_3) \geq 1 \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker}(M + 2I_3) \geq 1.}$$

- (c) Si l'un de ces deux noyaux avait une dimension au moins égale à 2, on pourrait choisir deux matrices colonnes propres libres dans ce noyau, puis une matrice colonne propre associée à l'autre valeur propre. Ces trois matrices colonnes propres seraient libres, donc formeraient une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La matrice M serait alors diagonalisable, ce qui contredit l'hypothèse. Avec la question précédente, on conclut que

$$\boxed{\dim \text{Ker}(M + I_3) = 1 \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker}(M + 2I_3) = 1.}$$

- (d) i. Supposons $au + bv = 0$. En appliquant $M + I_3$, il vient

$$b(M + I_3)v = -bv = 0.$$

Comme $v \neq 0$, $b = 0$, puis $a = 0$. Ainsi,

$$\boxed{(u, v) \text{ est une famille libre.}}$$

- ii. Puisque (u, v) est libre, $\text{Vect}(u, v)$ est de dimension 2. Le choix de $w \notin \text{Vect}(u, v)$ montre que (u, v, w) est libre. Cette famille contient trois éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc

$$(u, v, w) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

- iii. La première égalité de la question 9.a donne

$$(M + I_3)((M + 2I_3)w) = 0.$$

Donc $(M + 2I_3)w \in \text{Ker}(M + I_3) = \text{Vect}(u)$: il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(M + 2I_3)w = \alpha u$. De même, la seconde égalité donne un réel β tel que $(M + I_3)w = \beta v$. En soustrayant ces deux relations,

$$w = \alpha u - \beta v.$$

Ainsi $w \in \text{Vect}(u, v)$, contrairement à son choix. On a donc obtenu

$$\text{une contradiction : } M \text{ est nécessairement diagonalisable.}$$

10. Le sens direct résulte des questions 5 à 9 : dans tous les cas possibles pour son spectre, une matrice de $\mathcal{A}$ est diagonalisable, et son spectre est inclus dans $\{0, -1, -2\}$. Le sens réciproque est exactement la question 4. Finalement,

$$M \in \mathcal{A} \iff M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}.$$

Exercice 2

Partie A

1. (a) Lorsque $t \rightarrow 0^+$, $t^n \rightarrow 0$, donc

$$\frac{\ln(t)/(1+t^n)}{\ln(t)} = \frac{1}{1+t^n} \rightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(t).$$

- (b) Soit $y \in]0, 1]$. On effectue une intégration par parties sur $[y, 1]$ avec les fonctions $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = t$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment, telles que $u'(t) = 1/t$ et $v'(t) = 1$:

$$\begin{aligned} \int_y^1 \ln(t) dt &= [t \ln(t)]_y^1 - \int_y^1 1 dt \\ &= -y \ln(y) - (1 - y) = -1 + y - y \ln(y). \end{aligned}$$

Or $y \ln(y) \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow 0^+$, par croissances comparées. Ainsi,

$$\int_y^1 \ln(t) dt = -1 + y - y \ln(y) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \ln(t) dt = -1.$$

- (c) D'après la question 1.a,

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(t).$$

L'intégrale de $\ln(t)$ sur $]0, 1]$ converge d'après la question 1.b. Le critère de comparaison par équivalents montre donc que l'intégrale qui définit J_n converge. Ainsi,

$$J_n \text{ existe.}$$

2. (a) On écrit

$$t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} = \frac{\ln(t)}{t^{n-3/2}} \frac{t^n}{1+t^n}.$$

Comme $n \geq 2$, $n - 3/2 > 0$. Les croissances comparées donnent $\ln(t)/t^{n-3/2} \rightarrow 0$, tandis que $t^n/(1+t^n) \rightarrow 1$. Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} = 0.$$

- (b) La question précédente donne

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

La fonction considérée est positive sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} t^{-3/2} dt$ converge. Le critère de comparaison assure alors la convergence de l'intégrale définissant K_n . Ainsi,

$$K_n \text{ existe.}$$

3. Les intégrales sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ convergent d'après les questions 1 et 2. Leur somme existe donc et $I_n = J_n + K_n$. Ainsi,

$$I_n \text{ existe et } I_n = J_n + K_n.$$

Partie B

4. (a) Pour $t \in]0, 1]$, $\ln(t) \leq 0$, et

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) = -\frac{t^n \ln(t)}{1+t^n} \geq 0.$$

Comme $1+t^n \geq 1$ et $-t^n \ln(t) \geq 0$,

$$-\frac{t^n \ln(t)}{1+t^n} \leq -t^n \ln(t).$$

Par conséquent,

$$\forall t \in]0, 1], \quad 0 \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t).$$

- (b) Soit $y \in]0, 1]$. On effectue une intégration par parties sur $[y, 1]$ avec

$$u(t) = -\ln(t), \quad v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1},$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment, et $u'(t) = -1/t$, $v'(t) = t^n$. Il vient

$$\begin{aligned} \int_y^1 -t^n \ln(t) dt &= \left[-\frac{t^{n+1} \ln(t)}{n+1} \right]_y^1 + \frac{1}{n+1} \int_y^1 t^n dt \\ &= \frac{y^{n+1} \ln(y)}{n+1} + \frac{1 - y^{n+1}}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $y^{n+1} \ln(y) \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow 0^+$. Ainsi,

$$\int_0^1 -t^n \ln(t) dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

- (c) En intégrant l'encadrement de la question 4.a et en utilisant $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$, on obtient

$$0 \leq J_n + 1 \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Le membre de droite tend vers 0. Le théorème d'encadrement donne donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1.$$

5. (a) Pour $x \geq 1$, $\ln(x) \geq 0$. Posons $h(x) = x - \ln(x)$. Alors

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \geq 0.$$

La fonction h est croissante sur $[1, +\infty[$ et $h(1) = 1$, donc $h(x) \geq 0$. Ainsi $0 \leq \ln(x) \leq x$.

Si de plus $n \geq 3$, comme $1 + x^n \geq x^n$,

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Donc

$$\forall x \geq 1, \quad 0 \leq \ln(x) \leq x, \quad 0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}} \quad (n \geq 3).$$

- (b) En intégrant l'encadrement précédent sur $[1, +\infty[$,

$$0 \leq K_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n-1}} = \left[\frac{x^{-n+2}}{-n+2} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n-2}.$$

Ainsi,

$$0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2} \quad (n \geq 3).$$

- (c) Le théorème d'encadrement donne $K_n \rightarrow 0$. Comme $I_n = J_n + K_n$ et $J_n \rightarrow -1$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -1.$$

Partie C

6. Posons $u = -\ln(t)$, soit $t = e^{-u}$ et $dt = -e^{-u} du$. Lorsque $t = y$, $u = -\ln(y)$, et lorsque $t = 1$, $u = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt &= \int_{-\ln(y)}^0 \frac{-u}{1+e^{-nu}} (-e^{-u}) du \\ &= \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du.$$

7. (a) Une densité de la loi exponentielle de paramètre 1 est

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(b) Pour $x \geq 0$,

$$\left| \frac{-x}{1 + e^{-nx}} \right| \leq x.$$

Or $\mathbb{E}(X)$ existe et vaut 1, puisque X suit une loi exponentielle de paramètre 1. Par comparaison, $\mathbb{E}(Y_n)$ existe. D'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} \frac{-x}{1 + e^{-nx}} e^{-x} dx.$$

D'après la question 6, puis en faisant tendre y vers 0^+ , cette intégrale vaut J_n . Ainsi,

$$Y_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y_n) = J_n.$$

8. `def simulY(n,m):`

`Y = np.zeros(m)`

`for i in range(m):`

`X = rd.exponential(1)`

`Y[i] = -X/(1+np.exp(-n*X))`

`return Y`

9. (a) Soit $(Z_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, admettant une espérance m et une variance. La loi faible des grands nombres affirme que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_k - m \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

(b) Le script demande la valeur de n , simule 1000 réalisations indépendantes de Y_n , puis affiche leur moyenne. D'après la loi faible des grands nombres, cette moyenne fournit, pour un grand nombre de simulations, une valeur approchée de $\mathbb{E}(Y_n) = J_n$. Ainsi,

$$\text{le script fournit une valeur approchée de } J_n \text{ par simulation.}$$

Exercice 3

Partie A

1. On obtient deux piles consécutifs pour la première fois au deuxième lancer exactement lorsque les deux premiers lancers donnent pile :

$$[X = 2] = P_1 \cap P_2.$$

Pour que la première apparition ait lieu au rang 3, les lancers 2 et 3 doivent donner pile et le premier doit donner face :

$$[X = 3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3.$$

Enfin, pour une première apparition au rang 4, il faut et il suffit que le deuxième lancer donne face et que les lancers 3 et 4 donnent pile :

$$[X = 4] = F_2 \cap P_3 \cap P_4.$$

Par indépendance des lancers et équilibre de la pièce,

$$\begin{aligned} [X = 2] &= P_1 \cap P_2, & [X = 3] &= F_1 \cap P_2 \cap P_3, & [X = 4] &= F_2 \cap P_3 \cap P_4, \\ a_2 &= \frac{1}{4}, & a_3 &= \frac{1}{8}, & a_4 &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2. Pour $n \geq 2$, l'événement U_n est réalisé exactement lorsque le premier double pile apparaît à l'un des rangs $2, \dots, n$. Les événements $([X = k])_{2 \leq k \leq n}$ sont deux à deux incompatibles, donc

$$U_n = \bigcup_{k=2}^n [X = k] \quad \text{et} \quad \boxed{u_n = \sum_{k=2}^n a_k.}$$

3. (a)

```
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile != 2:
        if rd.random() < 1/2:
            pile = pile+1
        else:
            pile = 0
        tirs = tirs+1
    return tirs
```

(b)

```
def moyenne(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s+simulX()
    return s/n
```

- (c) Lorsque n augmente, les valeurs représentées semblent se rapprocher de 6. On peut donc conjecturer que X admet une espérance et que

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 6.}$$

Partie B

4. (a) On a $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$: un double pile apparaît au cours des $n+1$ premiers lancers soit au cours des n premiers, soit aux rangs n et $n+1$. La formule du crible donne

$$\boxed{\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}).}$$

- (b) Supposons $n \geq 4$. Sur $B_{n+1} = P_n \cap P_{n+1}$, l'événement U_n se produit dans exactement deux situations incompatibles :

- un double pile est déjà apparu avant le rang $n-1$, puis le lancer $n-1$ donne face;
- les lancers $n-1$, n et $n+1$ donnent tous pile.

Dans la première situation, les événements décrivant les $n-2$ premiers lancers sont regroupés dans U_{n-2} . On obtient donc

$$\boxed{U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).}$$

- (c) Les deux événements de l'union précédente sont incompatibles. De plus, U_{n-2} ne dépend que des $n-2$ premiers lancers ; il est donc indépendant de F_{n-1} , P_n et P_{n+1} . Par indépendance des lancers,

$$\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) = \frac{u_{n-2}}{8} + \frac{1}{8}.$$

Or $\mathbb{P}(B_{n+1}) = 1/4$. En reportant dans la question 4,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4} - \frac{u_{n-2} + 1}{8}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \quad (n \geq 4).$$

5. Pour tout n , $U_n \subset U_{n+1}$, donc $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Le théorème de la limite monotone assure qu'elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de la question 4.c, on obtient

$$\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell),$$

d'où $\ell = 1$. Ainsi,

$$(u_n)_{n \geq 4} \text{ est croissante et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

6. Les événements U_n sont croissants. Le théorème de la limite monotone (admis) donne

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n) = 1.$$

L'événement $[X = -1]$ est le complémentaire de cette réunion. Donc

$$\mathbb{P}(X = -1) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 0.$$

Partie C

7. Comme $v_n = 1 - u_n$, la relation de la question 4.c donne

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= (1 - u_n) - (1 - u_{n+1}) \\ &= u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = \frac{1}{8}v_{n-2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2} \quad (n \geq 4).$$

8. D'après la question 2,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=2}^{n+1} a_k - \sum_{k=2}^n a_k = a_{n+1}.$$

Comme $v_n - v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$, on obtient

$$\mathbb{P}(X = n + 1) = v_n - v_{n+1} \quad (n \geq 2).$$

9. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 2$,

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n.$$

On a $u_2 = a_2 = 1/4$, $u_4 = a_2 + a_3 + a_4 = 1/2$, donc $v_2 = 3/4$ et $v_4 = 1/2$. Par conséquent,

$$6 - 8v_4 - 2v_2 = 6 - 4 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 2\mathbb{P}(X = 2) = S_2.$$

La propriété est vraie au rang 2.

Supposons-la vraie à un rang $n \geq 2$. D'après la question 8,

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)(v_n - v_{n+1}).$$

Par ailleurs, la question 7, appliquée au rang $n+2$, donne $8(v_{n+2} - v_{n+3}) = v_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 6 - 8v_{n+3} - (n+1)v_{n+1} &= 6 - 8v_{n+2} - nv_n \\ &\quad + 8(v_{n+2} - v_{n+3}) + nv_n - (n+1)v_{n+1} \\ &= S_n + (n+1)(v_n - v_{n+1}) = S_{n+1}. \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire. Finalement,

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n.}$$

10. Pour tout $n \geq 2$,

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)\mathbb{P}(X = n+1) \geq 0,$$

donc (S_n) est croissante. Comme $v_{n+2} \geq 0$ et $nv_n \geq 0$, la question 9 donne $S_n \leq 6$. Ainsi,

$$\boxed{(S_n)_{n \geq 2} \text{ est croissante et majorée par } 6.}$$

11. D'après le théorème de la limite monotone, (S_n) converge vers un réel. De plus, $\mathbb{P}(X = -1) = 0$, donc X prend presque sûrement ses valeurs dans $\{2, 3, \dots\}$. La série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

a pour sommes partielles les S_n et converge. Par définition,

$$\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$$

12. (a) La question 9 donne

$$nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n.$$

Or $u_n \rightarrow 1$, donc $v_n \rightarrow 0$, et (S_n) converge d'après la question précédente. Le membre de droite converge donc vers un réel λ . Comme $nv_n \geq 0$, $\lambda \geq 0$. Ainsi,

$$\boxed{(nv_n)_{n \geq 2} \text{ converge vers un réel } \lambda \geq 0.}$$

(b) Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $\lambda > 0$ et

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}.$$

La série harmonique diverge ; le critère de comparaison par équivalent montre donc que $\sum_{n \geq 2} v_n$ diverge.

Cependant, la relation de la question 7 donne, pour $n \geq 4$, $v_{n-2} = 8(v_n - v_{n+1})$. Ainsi, pour $N \geq 4$,

$$\sum_{n=4}^N v_{n-2} = 8 \sum_{n=4}^N (v_n - v_{n+1}) = 8(v_4 - v_{N+1}).$$

Le membre de droite tend vers $8v_4$, puisque $v_{N+1} \rightarrow 0$. La série $\sum_{n \geq 2} v_n$ convergerait, ce qui est contradictoire. Par conséquent,

$$\boxed{\lambda = 0.}$$

(c) En faisant tendre n vers $+\infty$ dans $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$, on obtient

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 6 - 0 - 0.$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 6.}$$