

Année : 2021
Concours : Ecricome
Option : Mathématiques appliquées

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques appliquées en vigueur depuis 2023.

Sommaire

Exercice 1 : Matrices annulées par un polynôme	1
<i>Thèmes abordés : Réduction ; espaces vectoriels</i>	<i>1</i>
Exercice 2 : Intégrales généralisées et méthode de Monte-Carlo	2
<i>Thèmes abordés : Intégrales généralisées ; variables à densité ; convergences de variables ; Python</i>	<i>2</i>
Exercice 3 : Premier double pile	5
<i>Thèmes abordés : Probabilités discrètes ; suites ; séries ; Python</i>	<i>5</i>

Dans les questions Python, on suppose que les commandes `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` et `import matplotlib.pyplot as plt` ont été exécutées.

Exercice 1

Matrices annulées par un polynôme

Thèmes abordés : Réduction ; espaces vectoriels

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E .

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3 \quad (*)$$

Partie A : Exemples de matrices appartenant à $\mathcal{A}$.

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\alpha I_3 \in \mathcal{A}$.
2. L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il sous-espace vectoriel de E ?
3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
 - (a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer BX_1 et BX_2 .
 - (b) En déduire deux valeurs propres de B .
Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.
 - (c) Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.
 - (d) Démontrer que $D \in \mathcal{A}$, puis que $B \in \mathcal{A}$.
4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, telle que le spectre de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
Montrer que $M \in \mathcal{A}$.

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathcal{A}$

Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{A}$. On note $\text{Sp}(M)$ le spectre de M .

5. Déterminer un polynôme annulateur de M , et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
6. On suppose dans cette question que M admet 0 , -1 et -2 comme valeurs propres.
Justifier que M est diagonalisable.
7. (a) On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M .
Justifier que M et $M + 2I_3$ sont inversibles, puis démontrer que $M = -I_3$.
(b) Que peut-on dire de M si $\text{Sp}(M) = \{-2\}$? Si $\text{Sp}(M) = \{0\}$?
8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre.
Justifier que les matrices M , $M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.

9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes.

On traite ici le cas où $\text{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).

On veut démontrer par l'absurde que la matrice M est diagonalisable, et on suppose donc que M ne l'est pas.

On note I_3 la matrice identité d'ordre 3 et on travaille directement avec la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Montrer que :

$$(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3 \quad \text{et} \quad (M + 2I_3)(M + I_3) = 0_3$$

- (b) Démontrer que $\dim(\text{Ker}(M + I_3)) \geq 1$ et que $\dim(\text{Ker}(M + 2I_3)) \geq 1$.

- (c) En utilisant que M n'est pas diagonalisable, démontrer que :

$$\dim(\text{Ker}(M + I_3)) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(M + 2I_3)) = 1.$$

- (d) Soit u un vecteur propre de M associé à la valeur propre -1 .

Soit v un vecteur propre de M associé à la valeur propre -2 .

- i. Justifier que (u, v) forme une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.
- ii. Soit w un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\text{Vect}(u, v)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- iii. En utilisant les égalités

$$(M + I_3)(M + 2I_3)w = 0 \quad \text{et} \quad (M + 2I_3)(M + I_3)w = 0,$$

montrer qu'il existe deux réels α et β tels que

$$(M + 2I_3)w = \alpha u \quad \text{et} \quad (M + I_3)w = \beta v.$$

En déduire que w est une combinaison linéaire de u et v , et aboutir à une contradiction.

10. Montrer alors que pour toute matrice M de E :

$$M \in \mathcal{A} \iff M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}.$$

Exercice 2

Intégrales généralisées et méthode de Monte-Carlo

Thèmes abordés : Intégrales généralisées ; variables à densité ; convergences de variables ; Python

Rappel sur une impropriété en un point fini

Soit h une fonction continue sur $]0, b]$. L'intégrale $\int_0^b h(t) dt$ converge lorsque la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^b h(t) dt$$

existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est, par définition, la valeur de l'intégrale.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt.$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. (a) Démontrer que : $\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$.
(b) Démontrer que : $\forall y \in]0, 1], \int_y^1 \ln(t) dt = -1 + y - y \ln(y)$.
En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et déterminer sa valeur.
(c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.
2. (a) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right)$.
(b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n .
3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. (a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall t \in]0, 1], 0 \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t).$$

- (b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{(n+1)^2}$.

- (c) Dédire des questions précédentes que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1$.

5. (a) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \leq \ln(x) \leq x$.
En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$$

- (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}$.

- (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de Python.

6. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0, 1]$.

À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, montrer que :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du.$$

7. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

- (a) Donner une densité de X .

- (b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $Y_n = \frac{-X}{1+e^{-nX}}$.

Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, Y_n admet une espérance, et que $E(Y_n) = J_n$.

8. On rappelle qu'en langage Python, l'instruction `rd.exponential(1)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers n et m , et qui renvoie un tableau de longueur m dont chaque coefficient est une simulation d'une réalisation de Y_n :

```
def simulY(n, m):
    Y = np.zeros(m)
    for i in range(m):
        X = rd.exponential(1)
        Y[i] = .....
    return Y
```

9. (a) Énoncer la loi faible des grands nombres.
(b) On exécute en Python le script suivant :

```
n = int(input("Entrer la valeur de n : "))  
print(np.mean(simulY(n, 1000)))
```

Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3

Premier double pile

Thèmes abordés : Probabilités discrètes ; suites ; séries ; Python

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.

On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs.

Si on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1 .

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, ... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au n -ième lancer »
- P_n : « Obtenir Pile au n -ième lancer »

La suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs »
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = \mathbf{P}(U_n) \text{ et } a_n = \mathbf{P}(X = n).$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k .

En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4 .

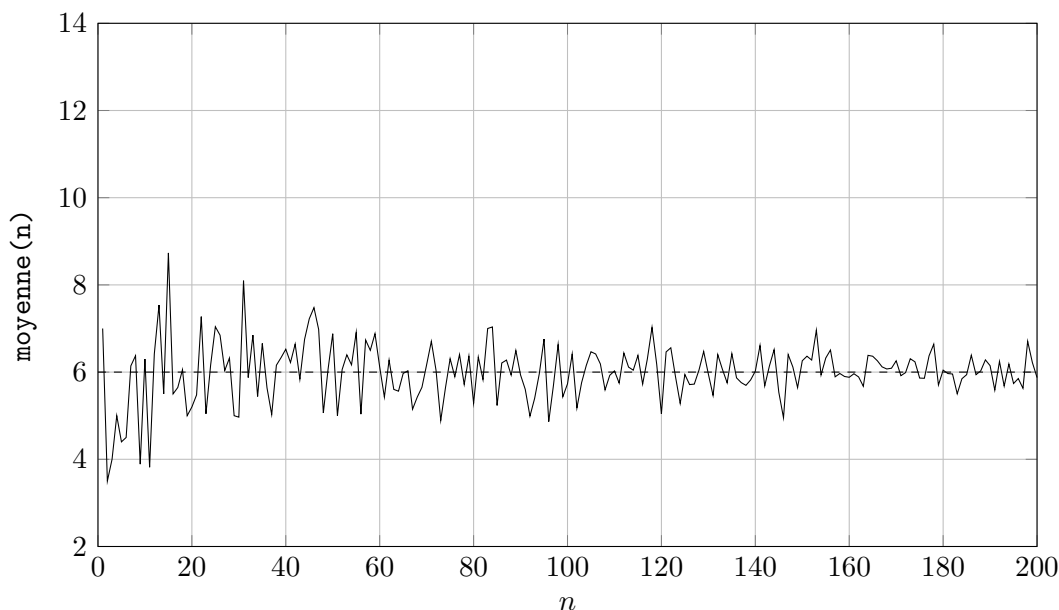
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum_{k=2}^n a_k$.

3. (a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
def simulX():  
    tirs = 0  
    pile = 0  
    while pile .....:  
        if rd.random() < 1/2:  
            pile += 1  
        else:  
            pile = .....  
            tirs = .....  
    return tirs
```

- (b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def moyenne(n):` qui simule `n` fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

- (c) On calcule **moyenne(n)** pour chaque entier n de $\llbracket 1, 200 \rrbracket$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Partie B

Théorème de la limite monotone

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante d'événements, c'est-à-dire telle que $A_n \subseteq A_{n+1}$ pour tout entier $n \geq 1$. Alors

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

4. (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbf{P}(U_{n+1}) = \mathbf{P}(U_n) + \mathbf{P}(B_{n+1}) - \mathbf{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

- (b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).$$

- (c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.
6. En déduire que :

$$\mathbf{P}(X = -1) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 0$$

Partie C : Étude de l'espérance de X .

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$v_n = 1 - u_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=2}^n k \mathbf{P}(X = k).$$

7. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2}$$

8. Justifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbf{P}(X = n + 1) = v_n - v_{n+1}$$

9. Démontrer alors par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$$

10. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée.
11. Montrer que X admet une espérance.
12. (a) Démontrer que la suite $(nv_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel λ .
- (b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
À l'aide de l'égalité démontrée à la question 7, obtenir une contradiction.
- (c) Donner alors la valeur de l'espérance de X .