

Corrigé Ecricome 2022

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	4
Exercice 3	8

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2022.

Exercice 1

Partie I

1. Posons

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toute matrice de F s'écrit de manière unique $aI_3 + bK$. Ainsi, F est engendré par (I_3, K) . Ces deux matrices ne sont pas proportionnelles, donc elles sont linéairement indépendantes. Donc

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad (I_3, K) \text{ en est une base et } \dim(F) = 2.$$

2. On a $I_3^2 = I_3$, donc $I_3 \in G$. En revanche, $(2I_3)^2 = 4I_3 \neq 2I_3$, donc $2I_3 \notin G$. L'ensemble G n'est donc pas stable par multiplication par un réel. Par conséquent,

$$G \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

3. (a) La matrice A est de la forme imposée dans la définition de F , avec $a = 2/3$ et $b = -1/3$. De plus,

$$A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi,

$$A \in F \cap G.$$

(b) L'égalité $A^2 = A$ s'écrit $A^2 - A = 0_3$. Le polynôme $P(X) = X^2 - X$ vérifie donc $P(A) = 0_3$:

$$X^2 - X \text{ est un polynôme annulateur de } A.$$

(c) D'après l'inclusion du spectre dans les racines d'un polynôme annulateur, les valeurs propres éventuelles de A appartiennent à $\{0, 1\}$.

Pour $\lambda = 0$, le système $AU = 0$ équivaut à

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ -x + 2y - z = 0, \\ -x - y + 2z = 0, \end{cases}$$

soit $x = y = z$. Donc

$$\ker(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\lambda = 1$, le système $(A - I_3)U = 0$ équivaut à $x + y + z = 0$. En posant $y = s$ et $z = t$, on obtient $x = -s - t$, donc

$$\ker(A - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Les deux espaces propres contiennent des vecteurs non nuls : 0 et 1 sont bien valeurs propres. Finalement,

$$\begin{aligned} \text{Sp}(A) &= \{0, 1\}, \\ E_0(A) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

- (d) Comme 0 est valeur propre de A , la matrice A n'est pas inversible. Les trois vecteurs propres affichés à la question précédente sont linéairement indépendants et forment donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Par la caractérisation de la diagonalisabilité,

A n'est pas inversible et A est diagonalisable.

Partie II

4. (a) Un calcul direct donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 2b^2 & 2ab + b^2 & 2ab + b^2 \\ 2ab + b^2 & a^2 + 2b^2 & 2ab + b^2 \\ 2ab + b^2 & 2ab + b^2 & a^2 + 2b^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $M^2 = M$ si et seulement si les coefficients diagonaux et les coefficients non diagonaux coïncident, c'est-à-dire

$$M \in G \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a, \\ b(b + 2a - 1) = 0. \end{cases}$$

- (b) Si $b = 0$, la première équation devient $a^2 = a$, d'où $(a, b) = (0, 0)$ ou $(1, 0)$: on obtient 0_3 et I_3 .

Si $b \neq 0$, la seconde équation donne $b = 1 - 2a$. En reportant dans la première :

$$a^2 + 2(1 - 2a)^2 = a \iff 9a^2 - 9a + 2 = 0 \iff (3a - 1)(3a - 2) = 0.$$

Pour $a = 2/3$, $b = -1/3$ et l'on obtient A . Pour $a = 1/3$, $b = 1/3$ et l'on obtient $I_3 - A$. Ainsi,

$$F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}.$$

5. Posons $B = I_3 - A$. Comme $A, B \in F$, la famille (A, B) est une famille de F . Si $xA + yB = 0_3$, alors, en comparant un coefficient diagonal et un coefficient non diagonal,

$$\frac{2x + y}{3} = 0, \quad \frac{-x + y}{3} = 0.$$

La seconde égalité donne $y = x$, puis la première $x = y = 0$. La famille est libre. Elle comporte deux éléments et $\dim(F) = 2$, donc

$$(A, B) \text{ est une base de } F.$$

6. (a) On a

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients diagonaux de $\alpha A + \beta B$ valent $(2\alpha + \beta)/3 = a$ et les autres valent $(-\alpha + \beta)/3 = b$, car $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. Ainsi,

$$\boxed{M = \alpha A + \beta B.}$$

(b) Comme $B = I_3 - A$ et $A^2 = A$,

$$AB = A(I_3 - A) = A - A^2 = 0_3, \quad BA = (I_3 - A)A = A - A^2 = 0_3.$$

Donc

$$\boxed{AB = BA = 0_3.}$$

(c) Montrons le résultat par récurrence. Pour $n = 0$,

$$\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = I_3 = M^0.$$

Supposons $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$. Comme $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA = 0_3$,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= (\alpha^n A + \beta^n B)(\alpha A + \beta B) \\ &= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B. \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \alpha^n A + \beta^n B.}$$

(d) Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, posons $N = \alpha^{-1} A + \beta^{-1} B$. Alors

$$MN = (\alpha A + \beta B)(\alpha^{-1} A + \beta^{-1} B) = A + B = I_3,$$

et le même calcul donne $NM = I_3$. Donc M est inversible.

Réciproquement, si $\alpha = 0$, tout vecteur propre de A associé à 1 est annulé par $M = \beta B$. Si $\beta = 0$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ est annulé par $M = \alpha A$. Dans chaque cas, M n'est pas inversible. Ainsi,

$$\boxed{M \text{ est inversible} \iff \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0.}$$

(e) La question précédente donne $M^{-1} = \alpha^{-1} A + \beta^{-1} B$. En appliquant la formule de la question 6(c) à cette matrice,

$$(M^{-1})^n = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B.}$$

Partie III

8. On calcule

$$I_3 - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme T agit par le coefficient 2 sur A et par le coefficient 5 sur B , on a $T = 2A + 5B$. Donc

$$\boxed{I_3 - T = -A - 4B.}$$

9. Dans la décomposition précédente, les deux coefficients sont non nuls. La question 6(d) donne l'inversibilité et la question 6(e), avec $n = 1$, donne

$$(I_3 - T)^{-1} = -A - \frac{1}{4}B.$$

10. L'égalité $L = TL + Y$ équivaut à $(I_3 - T)L = Y$. La matrice $I_3 - T$ étant inversible, elle admet une unique solution :

$$L = (I_3 - T)^{-1}Y.$$

Or $AY = Y$ et $BY = 0$, donc

$$L = \left(-A - \frac{1}{4}B\right)Y = -Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\text{il existe une unique telle matrice et } L = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. Puisque $L = TL + Y$ et $X_{n+1} = TX_n + Y$,

$$X_{n+1} - L = T(X_n - L).$$

Montrons alors la seconde égalité par récurrence. Pour $n = 0$, $X_0 - L = T^0(X_0 - L)$. Si $X_n - L = T^n(X_0 - L)$, alors

$$X_{n+1} - L = T(X_n - L) = T^{n+1}(X_0 - L).$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} - L = T(X_n - L), \quad X_n - L = T^n(X_0 - L).$$

12. Puisque $T = 2A + 5B$, la question 6(c) donne $T^n = 2^n A + 5^n B$. En reportant dans la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = L + (2^n A + 5^n B)(X_0 - L).$$

Exercice 2

Partie I : étude de la fonction g

1. Pour $x > 0$,

$$g(x) = \exp\left(2 \ln x - \frac{\ln x}{x}\right).$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $\ln x/x \rightarrow -\infty$ par croissances comparées. Plus précisément,

$$2 \ln x - \frac{\ln x}{x} = -\frac{\ln x}{x}(1 - 2x) \rightarrow +\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\ln(x)/x \rightarrow 0$ et $2 \ln x \rightarrow +\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

2. (a) Pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0.$$

Donc

$$h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.$$

- (b) La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $h(1/2) = \ln(1/2) < 0$ et $h(1) = 1 > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un $\alpha \in]1/2, 1[$ tel que $h(\alpha) = 0$. La stricte croissance de h assure son unicité. Ainsi,

$$\exists! \alpha > 0, \quad h(\alpha) = 0, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

- (c) Posons $\varphi(x) = (2 - 1/x) \ln x$. Alors $g = \exp \circ \varphi$ et

$$\varphi'(x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{2 - 1/x}{x} = \frac{\ln x + 2x - 1}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}.$$

Par dérivation d'une composée,

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{h(x)}{x^2} g(x).$$

- (d) Pour $x > 0$, $g(x)/x^2 > 0$, donc $g'(x)$ a le signe de $h(x)$. La stricte croissance de h et $h(\alpha) = 0$ donnent $h(x) < 0$ sur $]0, \alpha[$ et $h(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$. Ainsi,

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow g(\alpha) \nearrow$	$+\infty$

3. On écrit

$$g(x) - x^2 = x^2 \left(\exp \left(-\frac{\ln x}{x} \right) - 1 \right).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $t = -\ln(x)/x \rightarrow 0$ et $\exp(t) - 1 \sim t$. Par produit d'équivalents,

$$g(x) - x^2 \sim x^2 \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = -x \ln x.$$

Donc

$$g(x) - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x \ln x.$$

Partie II : étude d'une suite récurrente

4. Initialement u_0 existe et $u_0 > 0$. Si u_n existe et est strictement positif, alors $g(u_n)$ existe et est strictement positif, car l'exponentielle est strictement positive. Ainsi u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$. Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ existe et } u_n > 0.$$

5. `import numpy as np`

```
def valeurs(u0,n):
    U = np.zeros(n+1)
    U[0] = u0
    for k in range(n):
        U[k+1] = np.exp((2-1/U[k])*np.log(U[k]))
    return U
```

6. (a) Si $0 < x < 1$, alors $x - 1 < 0$ et $\ln x < 0$, donc leur produit est positif. Si $x = 1$, il est nul. Si $x > 1$, les deux facteurs sont positifs. Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad (x - 1) \ln x \geq 0, \text{ avec égalité si et seulement si } x = 1.}$$

- (b) Pour $x > 0$,

$$\frac{g(x)}{x} = \exp\left(\left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x\right) = \exp\left(\frac{(x - 1) \ln x}{x}\right).$$

L'exposant est positif ou nul d'après la question précédente. Donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \frac{g(x)}{x} \geq 1.}$$

- (c) Comme $x > 0$, l'inégalité précédente donne $g(x) \geq x$. L'égalité a lieu si et seulement si l'exposant précédent est nul, donc, d'après la question 6(a), si et seulement si $x = 1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad g(x) \geq x, \quad g(x) = x \iff x = 1.}$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et la question 6(c) donne

$$u_{n+1} = g(u_n) \geq u_n.$$

Par conséquent,

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

8. On suppose $u_0 \in [1/2, 1]$.

- (a) Pour $x \in [1/2, 1]$, on a $g(x) \geq x \geq 1/2$. De plus, $2 - 1/x \geq 0$ et $0 < x \leq 1$, donc $g(x) = x^{2-1/x} \leq 1$. Ainsi $g([1/2, 1]) \subset [1/2, 1]$. Comme $u_0 \in [1/2, 1]$, une récurrence donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1/2, 1].}$$

- (b) La suite est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell \in [1/2, 1]$. La fonction g étant continue, $u_{n+1} = g(u_n)$ donne $\ell = g(\ell)$. L'unique point fixe de g est 1, donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.}$$

9. On suppose $u_0 > 1$.

- (a) La suite est croissante, donc $u_n \geq u_0 > 1$ pour tout n . Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1.}$$

- (b) Une suite croissante possède soit une limite réelle, soit tend vers $+\infty$. Si elle avait une limite réelle ℓ , la continuité de g donnerait $\ell = g(\ell)$, donc $\ell = 1$. Or $\ell \geq u_0 > 1$, ce qui est impossible. Par le théorème de la limite monotone,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$$

10. On suppose $0 < u_0 < 1/2$. Alors $2 - 1/u_0 < 0$ et $0 < u_0 < 1$, donc

$$u_1 = u_0^{2-1/u_0} > 1.$$

À partir du rang 1, la question 9 s'applique : la suite tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\boxed{(u_n) \text{ n'est pas convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$$

Partie III : extrema de la fonction f

11. La fonction $(x, y) \mapsto y - 1/x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, de même que $(x, y) \mapsto \ln x$. Leur produit est de classe $\mathcal{C}^2$, puis sa composée avec l'exponentielle l'est aussi. Donc

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

12. Posons $\psi(x, y) = (y - 1/x) \ln x$. On a $f = \exp \circ \psi$ et

$$\partial_1 \psi(x, y) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{y - 1/x}{x} = \frac{\ln x + xy - 1}{x^2}, \quad \partial_2 \psi(x, y) = \ln x.$$

Comme $\partial_i f = (\partial_i \psi)f$,

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y) = \frac{\ln x + xy - 1}{x^2} f(x, y), \\ \partial_2 f(x, y) = \ln(x) f(x, y). \end{cases}$$

13. Comme $f(x, y) > 0$, l'égalité $\partial_2 f(x, y) = 0$ impose $\ln x = 0$, donc $x = 1$. L'égalité $\partial_1 f(1, y) = 0$ devient $y - 1 = 0$. Réciproquement, les deux dérivées partielles s'annulent en $(1, 1)$. Ainsi,

$$f \text{ admet l'unique point critique } a = (1, 1).$$

14. Écrivons $\partial_i f = (\partial_i \psi)f$. Au point critique a , $\partial_1 \psi(a) = \partial_2 \psi(a) = 0$, donc $\partial_{i,j} f(a) = \partial_{i,j} \psi(a)f(a)$ et $f(a) = 1$. Or

$$\partial_1 \psi = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad \partial_2 \psi = \ln x,$$

d'où

$$\partial_{1,1} \psi(1, 1) = 2, \quad \partial_{1,2} \psi(1, 1) = \partial_{2,1} \psi(1, 1) = 1, \quad \partial_{2,2} \psi(1, 1) = 0.$$

Ainsi,

$$\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Les valeurs propres λ de la hessienne vérifient

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le système donne $x = \lambda y$, puis $2\lambda y + y = \lambda^2 y$. Un vecteur propre étant non nul, $y \neq 0$, et $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$. Les deux valeurs propres sont $1 - \sqrt{2} < 0$ et $1 + \sqrt{2} > 0$. Elles sont de signes opposés donc

$$f \text{ n'admet pas d'extremum local en } a.$$

16. Fixons $x = 2$. On a

$$f(2, y) = 2^{y-1/2}.$$

Cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque $y \rightarrow +\infty$: f n'est pas majorée. Elle tend vers 0 lorsque $y \rightarrow -\infty$, tandis que $f(x, y) > 0$ sur son domaine : f n'atteint pas de plus petite valeur. Donc

$$f \text{ n'admet aucun extremum global sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

Exercice 3

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Pour chaque jeton, la probabilité d'être placé dans l'urne 1 est $1/3$, indépendamment des autres placements. X_n compte donc les succès lors de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $1/3$. Le raisonnement est identique pour les deux autres urnes. Ainsi,

$$X_n, Y_n, Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/3).$$

- (b) Les formules de la loi binomiale donnent

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \binom{n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

- (c) Les urnes 2 et 3 sont toutes les deux vides si et seulement si les n jetons sont tous dans l'urne 1, c'est-à-dire si et seulement si $X_n = n$. Donc

$$[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n].$$

- (d) Il reste au moins une urne vide si et seulement si l'un au moins des trois nombres X_n, Y_n, Z_n est nul. Ainsi,

$$V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0].$$

- (e) La formule de réunion de trois événements donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_n) &= \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(Y_n = 0) + \mathbb{P}(Z_n = 0) \\ &\quad - \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]) - \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Z_n = 0]) \\ &\quad - \mathbb{P}([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) + \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]). \end{aligned}$$

Les trois probabilités simples valent $(2/3)^n$, les trois probabilités d'intersection deux à deux valent $(1/3)^n$, et l'intersection des trois événements est impossible puisque $n \geq 1$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(V_n) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

2. Les événements (V_n) sont décroissants : lorsqu'une urne n'est plus vide, elle ne le redevient pas. L'événement qu'au moins une urne reste toujours vide est donc

$$V = \bigcap_{n \geq 1} V_n.$$

Par le théorème de la limite monotone (admis),

$$\mathbb{P}(V) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 3 \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{V = \bigcap_{n \geq 1} V_n, \quad \mathbb{P}(V) = 0.}$$

3. (a) `import numpy as np`
`import numpy.random as rd`

```
def T():
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    n = 0
    liste = np.array([X,Y,Z])
    while np.min(liste) == 0:
        i = rd.randint(1,4)
        liste[i-1] = liste[i-1]+1
        n = n+1
    t = n
    return t
```

(b) `S = np.zeros(10000)`
`for k in range(10000):`
 `S[k] = T()`
`np.mean(S)`

4. Il faut au moins trois jetons pour remplir les trois urnes. Toute valeur $n \geq 3$ est possible : on peut remplir les trois urnes avec les trois premiers jetons, sauf l'une d'elles qui reçoit son premier jeton au rang n . Ainsi,

$$\boxed{T(\Omega) = \llbracket 3, +\infty \rrbracket.}$$

5. Pour $n \geq 3$, l'événement $[T = n]$ signifie qu'après $n - 1$ jetons une urne au moins est vide, mais qu'après n jetons aucune ne l'est. Puisque $V_n \subset V_{n-1}$,

$$[T = n] = V_{n-1} \setminus V_n.$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in T(\Omega), \quad \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_n).}$$

6. Pour $n \geq 3$, la question précédente donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = n) &= 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} - 3 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n + 3 \left(\frac{1}{3} \right)^n \\ &= \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} - 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

La série de terme général $n(2/3)^{n-1}$ converge, donc l'espérance de T existe par comparaison. Pour $|q| < 1$,

$$\sum_{n=3}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} - 1 - 2q.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \sum_{n=3}^{+\infty} n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right] \\ &= \left(9 - 1 - \frac{4}{3}\right) - 2 \left(\frac{9}{4} - 1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3} - \frac{7}{6} = \frac{11}{2}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$T \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(T) = \frac{11}{2}.$$

Partie II

7. (a) Si les deux jetons sont dans l'urne 1, alors $(X_2, W_2) = (2, 2)$, avec probabilité $1/9$. S'ils sont tous deux dans l'urne 2 ou tous deux dans l'urne 3, alors $(X_2, W_2) = (0, 2)$, avec probabilité $2/9$. S'ils occupent les urnes 2 et 3, alors $(X_2, W_2) = (0, 1)$, avec probabilité $2/9$. Enfin, si l'un est dans l'urne 1 et l'autre dans l'urne 2 ou 3, alors $(X_2, W_2) = (1, 1)$, avec probabilité $4/9$. Donc

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$
$W_2 = 1$	$2/9$	$4/9$	0
$W_2 = 2$	$2/9$	0	$1/9$

- (b) En additionnant les colonnes du tableau,

$$\mathbb{P}(W_2 = 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(W_2 = 2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(W_2) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(W_2 = 1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(W_2 = 2) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{E}(W_2) = \frac{4}{3}.$$

- (c) D'après le tableau,

$$\mathbb{E}(X_2 W_2) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Comme $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2, 1/3)$, $\mathbb{E}(X_2) = 2/3$. Ainsi,

$$\text{Cov}(X_2, W_2) = \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = 0.$$

Donc

$$\text{Cov}(X_2, W_2) = 0.$$

- (d) On a

$$\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]) = 0,$$

alors que

$$\mathbb{P}(X_2 = 2)\mathbb{P}(W_2 = 1) = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27} > 0.$$

L'égalité caractéristique de l'indépendance n'est pas vérifiée. Ainsi,

$$X_2 \text{ et } W_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

Dans la suite, $n \geq 3$.

8. Après au moins trois placements, il peut rester zéro, une ou deux urnes vides, et chacune de ces situations est possible. Il ne peut pas en rester trois puisque $n \geq 1$. Donc

$$W_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

9. (a) La variable $W_{n,i}$ suit une loi de Bernoulli dont le paramètre est la probabilité que l'urne i soit vide. Chacun des n jetons évite cette urne avec probabilité $2/3$, indépendamment des autres. Ainsi,

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \mathbb{E}(W_{n,i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

- (b) Chaque variable $W_{n,i}$ vaut 1 exactement lorsque l'urne i est vide. Le nombre total d'urnes vides est donc

$$W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}.$$

- (c) Par linéarité de l'espérance et par la question 9(a),

$$\mathbb{E}(W_n) = \mathbb{E}(W_{n,1}) + \mathbb{E}(W_{n,2}) + \mathbb{E}(W_{n,3}) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Donc

$$\mathbb{E}(W_n) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

10. L'événement $[X_n = n]$ signifie que tous les jetons sont dans l'urne 1 ; dans ce cas, exactement deux urnes sont vides. Il a pour probabilité $(1/3)^n$. Ainsi,

$$\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Si $1 \leq k \leq n-1$, les jetons occupent l'urne 1 et au moins une autre urne, donc il ne peut rester deux urnes vides. Finalement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^n, \\ \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) &= 0. \end{aligned}$$

11. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Pour avoir $X_n = k$ et une seule urne vide, on choisit les k jetons placés dans l'urne 1, puis tous les autres sont placés soit dans l'urne 2, soit dans l'urne 3. Il y a donc $2\binom{n}{k}$ placements favorables parmi les 3^n placements équiprobables. Par ailleurs, si $X_n = n$, les deux autres urnes sont vides, donc $W_n = 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) &= \frac{2\binom{n}{k}}{3^n}, \\ \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 1]) &= 0. \end{aligned}$$

12. La variable $X_n W_n$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Les cas où le produit est non nul sont :

- $X_n = n$ et $W_n = 2$, ce qui donne le produit $2n$;

- $X_n = k$ et $W_n = 1$, avec $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, ce qui donne le produit k .

La formule de l'espérance d'une variable discrète donne donc

$$\mathbb{E}(X_n W_n) = 2n\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) + \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]).$$

13. D'après les questions 10 et 11,

$$\mathbb{E}(X_n W_n) = \frac{2n}{3^n} + \frac{2}{3^n} \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k}.$$

Or

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} = n2^{n-1} - n.$$

Il vient

$$\mathbb{E}(X_n W_n) = \frac{2n + 2(n2^{n-1} - n)}{3^n} = n \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

De plus, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/3)$, donc $\mathbb{E}(X_n) = n/3$, et la question 9(c) donne $\mathbb{E}(W_n) = 3(2/3)^n$. Ainsi,

$$\text{Cov}(X_n, W_n) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n}{3} 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(X_n W_n) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \text{Cov}(X_n, W_n) = 0.$$

14. Une covariance nulle signifie que les deux variables sont non corrélées. Cela ne signifie pas qu'elles sont indépendantes : par exemple,

$$\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 0]) = 0,$$

alors que $\mathbb{P}(X_n = n) > 0$ et $\mathbb{P}(W_n = 0) > 0$ puisque $n \geq 3$. Par conséquent,

$$X_n \text{ et } W_n \text{ sont non corrélées mais non indépendantes.}$$