

Corrigé Ecricome 2023

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	4
Exercice 3	6

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2023.

Exercice 1

1. Le premier tirage est équiprobable parmi les n numéros. Ainsi, X suit la loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Les formules de cette loi donnent

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

2. Tous les numéros obtenus dans la seconde urne appartiennent à $\llbracket 1, n \rrbracket$. Réciproquement, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement $[X = j]$ a une probabilité non nulle et, lorsqu'il est réalisé, la seconde urne contient des boules numérotées j . Donc

$$Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket.$$

3. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- (a) Lorsque $[X = k]$ est réalisé, le nombre de boules de la seconde urne est

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ainsi,

$$\text{la seconde urne contient } \frac{k(k+1)}{2} \text{ boules.}$$

- (b) Si $j \leq k$, il y a j boules portant le numéro j parmi les $k(k+1)/2$ boules. Si $j \geq k+1$, il n'y en a aucune. Par conséquent,

$$\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \frac{2j}{k(k+1)}, & 1 \leq j \leq k, \\ 0, & k+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

4. (a) L'égalité demandée équivaut, après multiplication par $k(k+1)$, à

$$1 = a(k+1) + bk = (a+b)k + a.$$

Elle est vraie pour tout $k \geq 1$ si $a = 1$ et $a+b = 0$. Donc

$$a = 1 \quad \text{et} \quad b = -1.$$

- (b) Fixons $j \in Y(\Omega)$. Les événements $([X = k])_{1 \leq k \leq n}$ forment un système complet d'événements. Les formules des probabilités totales donnent, puisque les termes d'indice $k < j$ sont nuls,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{k=j}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) \\ &= \sum_{k=j}^n \frac{1}{n} \frac{2j}{k(k+1)} = \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{2j}{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y = j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}.$$

5. La variable Y ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc son espérance existe. D'après sa loi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=1}^n j \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left((n+1) \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left((n+1) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= (n+1) - \frac{2n+1}{3} = \frac{n+2}{3}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{n+2}{3}.$$

6. Si $n = 1$, les deux variables sont certaines, égales à 1, donc elles sont indépendantes. Supposons désormais $n \geq 2$. On a

$$\mathbb{P}_{[X=n]}(Y = n) = \frac{2}{n+1}, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Ces deux probabilités sont différentes, donc

$$\boxed{\text{si } n = 1, X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes ; si } n \geq 2, X \text{ et } Y \text{ ne le sont pas.}}$$

7. (a) Le produit XY ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc son espérance existe. Pour $1 \leq j \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) = \frac{2j}{nk(k+1)}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k kj \frac{2j}{nk(k+1)} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^k j^2 \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n k(2k+1) \\ &= \frac{1}{3n} \left(2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{(n+1)(4n+5)}{18}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18}.$$

- (b) Par définition,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{n+1}{2} \frac{n+2}{3} \\ &= \frac{(n+1)(4n+5-3n-6)}{18} = \frac{(n+1)(n-1)}{18}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{n^2 - 1}{18}.$$

8. (a)

```
def seconde_urne(k):
    L = []
    for j in range(1, k+1):
        for i in range(j):
            L.append(j)
    return L
```

(b)

```
import numpy.random as rd
```

```
def simul_XY(n):
    X = rd.randint(1, n+1)
    urne2 = seconde_urne(X)
    nb = len(urne2)
    i = rd.randint(0, nb)
    Y = urne2[i]
    return X, Y
```

(c) Pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'élément d'indice $j - 1$ est la fréquence d'apparition de la valeur j parmi 10000 réalisations de Y . Il estime donc

$$\mathbb{P}(Y = j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}.$$

9. On suppose $n = 20$.

(a) Les moyennes empiriques des 50 abscisses et ordonnées sont proches de leurs espérances respectives, d'après la loi faible des grands nombres. Or

$$\mathbb{E}(X) = \frac{21}{2} = 10,5, \quad \mathbb{E}(Y) = \frac{22}{3} \simeq 7,33.$$

Ainsi,

$$\text{le point moyen est approximativement } (10,5; 7,33).$$

(b) Chaque réalisation vérifie $1 \leq Y \leq X \leq 20$. La droite de régression de Y en X passe par le point moyen. Son coefficient directeur théorique vaut

$$\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{V}(X)} = \frac{(n^2 - 1)/18}{(n^2 - 1)/12} = \frac{2}{3},$$

et son ordonnée à l'origine vaut

$$\mathbb{E}(Y) - \frac{2}{3}\mathbb{E}(X) = \frac{n+2}{3} - \frac{2}{3} \frac{n+1}{2} = \frac{1}{3}.$$

La droite théorique a donc pour équation $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Parmi les figures proposées, le troisième tracé possède cette pente, passe par le point moyen et respecte la contrainte $Y \leq X$. Donc

$$\text{la figure correcte est le tracé 3.}$$

Exercice 2

1. (a) Sur $]0, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto e^{x/2}$ et $x \mapsto x^{-1/2}$ sont dérivables. Leur produit f l'est donc aussi et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}e^{x/2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}e^{x/2}x^{-3/2} \\ &= \frac{x-1}{2x} \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{2x} f(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$

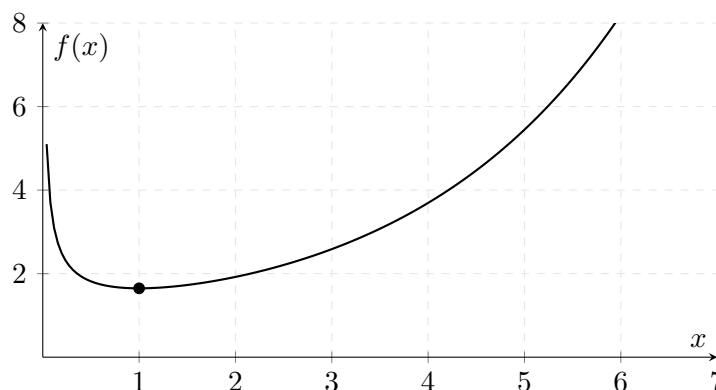
- (b) Pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x/2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0,$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Par croissances comparées, $e^{x/2}/\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Enfin $f(1) = \sqrt{e}$. Donc

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \sqrt{e} \nearrow$	$+\infty$

- (c) L'allure déduite du tableau de variations est la suivante.



la courbe décroît jusqu'à $(1, \sqrt{e})$ puis croît.

- (d) Puisque $e < 3 < 4$, on a $\sqrt{e} < 2 \leq n$. Sur $]0, 1]$, la fonction f est continue, strictement décroissante, sa limite en 0^+ vaut $+\infty$ et $f(1) = \sqrt{e} < n$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie donnent une unique solution $u_n \in]0, 1[$.

Sur $[1, +\infty[$, f est continue, strictement croissante, vaut $\sqrt{e} < n$ en 1 et tend vers $+\infty$. On obtient de même une unique solution $v_n \in]1, +\infty[$. Ainsi,

$$\forall n \geq 2, \quad f(x) = n \text{ possède exactement deux solutions } 0 < u_n < 1 < v_n.$$

2. (a) Pour $n \geq 2$,

$$f(v_{n+1}) = n+1 > n = f(v_n).$$

Comme v_n et v_{n+1} appartiennent à $]1, +\infty[$, où f est strictement croissante, on a $v_{n+1} > v_n$. Donc

$$(v_n)_{n \geq 2} \text{ est strictement croissante.}$$

- (b) Supposons par l'absurde que (v_n) ne tende pas vers $+\infty$. Puisqu'elle est croissante, elle serait majorée, donc convergerait vers un réel $L \geq 1$ d'après le théorème de la limite monotone. Par continuité de f en L , on aurait $f(v_n) \rightarrow f(L)$, réel, alors que $f(v_n) = n \rightarrow +\infty$. Cette contradiction prouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

3. (a) Pour $n \geq 2$,

$$f(u_{n+1}) = n + 1 > n = f(u_n).$$

Sur $]0, 1[$, la fonction f est strictement décroissante. On en déduit $u_{n+1} < u_n$, donc

$$(u_n)_{n \geq 2} \text{ est strictement décroissante.}$$

- (b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Le théorème de la limite monotone assure donc sa convergence vers un réel $\ell \geq 0$:

$$(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \in [0, 1[.$$

- (c) Supposons par l'absurde que $\ell > 0$. La fonction f est alors continue en ℓ , si bien que $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$, réel. Mais $f(u_n) = n \rightarrow +\infty$, ce qui est contradictoire. Par conséquent,

$$\ell = 0.$$

- (d) L'égalité $f(u_n) = n$ donne

$$\frac{e^{u_n/2}}{\sqrt{u_n}} = n, \quad \text{puis} \quad n^2 u_n = e^{u_n}.$$

Comme $u_n \rightarrow 0$, la continuité de l'exponentielle donne $e^{u_n} \rightarrow 1$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1, \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

4. (a) Comme f est décroissante sur $]0, 1[$, si $f(c) < n$, alors $c > u_n$ et il faut remplacer b par c . Dans l'autre cas, on remplace a par c .

```
import numpy as np
```

```
def approx_u(n,eps):
    a = 0
    b = 1
    while b-a > eps:
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

- (b) Pour obtenir une erreur totale au plus égale à `eps`, on approche chacun des $N - 1$ termes avec une erreur au plus égale à `eps/(N-1)`.

```
def sp(N,eps):
    s = 0
    for n in range(2,N+1):
        s = s+approx_u(n,eps/(N-1))
    return s
```

Exercice 3

Partie 1

1. (a) Supposons

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0.$$

La lecture des quatre coordonnées donne

$$-a + d = 0, \quad a - b + c = 0, \quad b + c = 0, \quad a + d = 0.$$

Les première et quatrième égalités donnent $a = d = 0$. Les deux autres deviennent $-b + c = 0$ et $b + c = 0$, d'où $b = c = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre. Comme elle contient quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$, la propriété d'une famille libre de cardinal égal à la dimension donne

$$\boxed{\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.}$$

- (b) Un calcul direct fournit

$$f(u_1) = 0, \quad f(u_2) = 0, \quad f(u_3) = 2u_3, \quad f(u_4) = u_3 + 2u_4.$$

Les colonnes de la matrice cherchée sont les coordonnées de ces images dans $\mathcal{B}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (c) La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base canonique est

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible puisque $\mathcal{B}$ est une base. La formule de changement de base donne $T = P^{-1}AP$, donc

$$\boxed{A = PTP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Par multiplication matricielle,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Or

$$4A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boxed{A^3 = 4A^2 - 4A.}$$

- (b) Au rang 1, $A = 0A^2 + 1A$: on peut prendre $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$. Supposons qu'à un rang $n \geq 1$, $A^n = a_n A^2 + b_n A$. Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= a_n A^3 + b_n A^2 \\ &= a_n (4A^2 - 4A) + b_n A^2 \\ &= (4a_n + b_n)A^2 - 4a_n A. \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire, et les coefficients obtenus vérifient

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad A^n = a_n A^2 + b_n A, \quad a_{n+1} = 4a_n + b_n, \quad b_{n+1} = -4a_n.}$$

3. (a) Pour $n \geq 1$,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

Ainsi,

$$\boxed{a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.}$$

- (b) On sait que $a_1 = 0$ et, puisque $a_2 = 4a_1 + b_1$, que $a_2 = 1$. Montrons par récurrence double que

$$a_n = (n-1)2^{n-2}.$$

La formule est vraie aux rangs 1 et 2. Si elle est vraie aux rangs n et $n+1$, alors

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 4n2^{n-1} - 4(n-1)2^{n-2} \\ &= n2^{n+1} - (n-1)2^n = (n+1)2^n. \end{aligned}$$

C'est bien la formule au rang $n+2$. Donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad a_n = (n-1)2^{n-2}.$$

- (c) La relation $b_{n+1} = -4a_n$ donne, pour $n \geq 1$,

$$b_{n+1} = -4(n-1)2^{n-2} = -(n-1)2^n.$$

Après décalage de l'indice, cette expression, également correcte pour $n = 1$, devient

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad b_n = -(n-2)2^{n-1}.$$

4. Pour $n \geq 1$,

$$A^n = (n-1)2^{n-2}A^2 - (n-2)2^{n-1}A.$$

En remplaçant A et A^2 par leurs valeurs puis en calculant chaque coefficient, on obtient par exemple

$$(A^n)_{2,1} = 3(n-1)2^{n-2} - (n-2)2^{n-1} = (n+1)2^{n-2},$$

et

$$(A^n)_{2,4} = (n-1)2^{n-2}.$$

Les autres coefficients se calculent de la même façon, d'où

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Partie 2

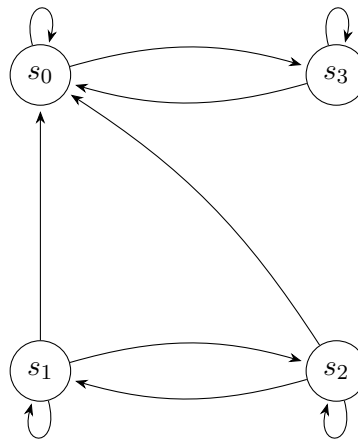
5. (a) La matrice d'adjacence $M = (m_{ij})$ de G est la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie, pour $(i, j) \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^2$, par

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{s'il existe une arête orientée de } s_i \text{ vers } s_j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (b) La propriété des puissances d'une matrice d'adjacence affirme que, pour $n \geq 1$, le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j de M^n est

le nombre de chemins de longueur n menant de s_i à s_j .

6. (a) Le diagramme comporte une boucle en chaque sommet, des arêtes dans les deux sens entre s_0 et s_3 , entre s_1 et s_2 , ainsi que des arêtes de s_1 et s_2 vers s_0 .



le diagramme ci-dessus représente le graphe G .

- (b) Si l'on ne tient pas compte du sens des arêtes, s_1 , s_2 et s_3 sont chacun reliés à s_0 . Tous les sommets appartiennent donc à une même composante. Ainsi,

G est connexe.

- (c) D'après la propriété rappelée à la question 5(b), le nombre demandé est le coefficient de la quatrième ligne et de la première colonne de A^n . La formule de la question 4 donne

il existe 2^{n-1} chemins de longueur n de s_3 vers s_0 .

```

7. def matrice_vers_liste(A):
    p = len(A)
    L = []
    for i in range(p):
        voisins = []
        for j in range(p):
            if A[i][j] == 1:
                voisins.append(j)
        L.append(voisins)
    return L
  
```

8. (a) Au départ, $\text{distances}=[4,0,4,4]$. Depuis s_1 , on atteint s_0 et s_2 en une arête. Depuis s_0 , on atteint ensuite s_3 en deux arêtes. On obtient donc

$\text{distances}=[1,0,1,2]$.

```
(b) def parcours(L,i0):
    p = len(L)
    distances = [p]*p
    distances[i0] = 0
    a_explorer = [i0]
    marques = [i0]
    while len(a_explorer) > 0:
        s = a_explorer[0]
        del a_explorer[0]
        for v in L[s]:
            if marques.count(v) == 0:
                marques.append(v)
                a_explorer.append(v)
                distances[v] = distances[s]+1
    return distances
```

- (c) La liste `marques` contient précisément les numéros des sommets atteignables. Il suffit donc de la renvoyer.

```
def sommets_accessibles(L,i0):
    p = len(L)
    distances = [p]*p
    distances[i0] = 0
    a_explorer = [i0]
    marques = [i0]
    while len(a_explorer) > 0:
        s = a_explorer[0]
        del a_explorer[0]
        for v in L[s]:
            if marques.count(v) == 0:
                marques.append(v)
                a_explorer.append(v)
                distances[v] = distances[s]+1
    return marques
```