

Corrigé Ecricome 2024

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	4
Exercice 3	8

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2024.

Exercice 1

Partie I

1. (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, l'événement $[X > k]$ signifie que les k premiers essais sont des échecs. Par indépendance de ces essais,

$$R_X(k) = \mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad R_X(k) = (1 - p)^k.}$$

- (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $R_X(k - 1) = (1 - p)^{k-1} > 0$, donc

$$\frac{R_X(k)}{R_X(k - 1)} = \frac{(1 - p)^k}{(1 - p)^{k-1}} = 1 - p.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{R_X(k)}{R_X(k - 1)} = 1 - p.}$$

2. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles et leur réunion est $[X > k - 1]$. Ainsi,

$$R_X(k - 1) = \mathbb{P}(X = k) + R_X(k),$$

d'où

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = R_X(k - 1) - R_X(k).}$$

- (b) Si X et Y suivent la même loi, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$R_X(k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = j) = R_Y(k).$$

Réciproquement, supposons que $R_X(k) = R_Y(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la question précédente donne

$$\mathbb{P}(X = k) = R_X(k - 1) - R_X(k) = R_Y(k - 1) - R_Y(k) = \mathbb{P}(Y = k).$$

Les deux variables ont donc la même loi. Finalement,

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi} \iff \forall k \in \mathbb{N}, \quad R_X(k) = R_Y(k).}$$

Partie II

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!} = \frac{a(n+1) - b}{(n+1)!}.$$

L'égalité demandée pour tout n équivaut à $a(n+1) - b = n$, donc $a = 1$ et $a - b = 0$. Ainsi,

$$\boxed{a = 1 \quad \text{et} \quad b = 1.}$$

(b) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

Comme $1/(N+1)! \rightarrow 0$, la suite des sommes partielles converge et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.}$$

4. (a) La variable $X+1$ est positive. De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\mathbb{P}(X=n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e. \end{aligned}$$

Cette série converge, donc l'espérance de $X+1$ existe et $\mathbb{E}(X+1) = e$. Par linéarité, $\mathbb{E}(X) + 1 = e$, d'où

$$\boxed{\mathbb{E}(X+1) = e \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X) = e - 1.}$$

(b) La variable $(X-1)(X+1)$ est positive puisque X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $n=1$, le terme correspondant est nul, et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n+1)\mathbb{P}(X=n) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)(n+1)n}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = e. \end{aligned}$$

Son espérance existe donc et vaut e . Or

$$(X-1)(X+1) = X^2 - 1,$$

donc $\mathbb{E}(X^2) = e + 1$. Il en résulte

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= e + 1 - (e - 1)^2 = 3e - e^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}((X-1)(X+1)) = e, \quad \mathbb{V}(X) = 3e - e^2.}$$

Partie III

5. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[X > k-1]$ signifie que l'appareil fonctionne encore à la fin de l'année $k-1$. Sous cette condition, il continue de fonctionner à la fin de l'année k avec la probabilité $1 - \alpha_k$. La formule des probabilités composées donne donc

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > k-1)\mathbb{P}_{[X > k-1]}(X > k).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad R_X(k) = (1 - \alpha_k)R_X(k-1).}$$

6. Comme X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $R_X(0) = \mathbb{P}(X > 0) = 1$. En appliquant successivement la relation précédente,

$$R_X(k) = (1 - \alpha_k)(1 - \alpha_{k-1}) \cdots (1 - \alpha_1)R_X(0).$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i).$$

7. D'après la question 2a,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= R_X(k-1) - R_X(k) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) - (1 - \alpha_k) \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) \\ &= \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i). \end{aligned}$$

On convient qu'un produit sans facteur vaut 1, ce qui couvre aussi $k = 1$. Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i).$$

8. (a) Si $\alpha_k = p$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On reconnaît

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

- (b) Ici, $1 - \alpha_i = 1/(i + 1)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$R_X(k) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{i+1} = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Puis

$$\mathbb{P}(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Partie IV

9. (a) Il faut compter toutes les lignes de la table :

```
SELECT COUNT(*) FROM ordinateur;
```

- (b) Une panne a lieu exactement un an après la fabrication lorsque `annee_panne = annee_fabrication + 1`. Ainsi,

```
SELECT COUNT(*) FROM ordinateur
WHERE annee_panne = annee_fabrication + 1;
```

- (c) Notons N le résultat de la première requête et N_1 celui de la seconde. La fréquence observée des ordinateurs dont la durée de vie vaut une année est N_1/N . Or, pour une loi géométrique de paramètre p ,

$$\mathbb{P}(X = 1) = p.$$

On peut donc choisir la fréquence observée comme estimation de p :

$$\hat{p} = \frac{N_1}{N}.$$

10. On ne modifie que les lignes correspondant aux appareils déjà en panne :

```
UPDATE ordinateur
SET duree_vie = annee_panne - annee_fabrication
WHERE annee_panne != -1;
```

11. (a) Si le résultat affiché est m , il fournit la moyenne observée des durées de vie enregistrées. Pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.$$

On obtient donc l'estimation

$$\hat{p} = \frac{1}{m}.$$

Pour que ce calcul représente bien la moyenne des durées observées, il faut que les valeurs -1 ne soient pas incluses. Si elles figurent encore dans la table, on ajoute la condition `WHERE duree_vie != -1`.

- (b) Pour $k \in \llbracket 1, 24 \rrbracket$, notons f_k le résultat de la requête associée à k . Il s'agit de la fréquence observée des appareils dont la durée de vie vaut k . Si le modèle géométrique de paramètre $\hat{p}$ est pertinent, on doit avoir approximativement

$$f_k \simeq \hat{p}(1 - \hat{p})^{k-1}.$$

On peut donc comparer, pour k de 1 à 24, les fréquences f_k aux valeurs théoriques $\hat{p}(1 - \hat{p})^{k-1}$. On peut aussi vérifier que, lorsque f_k n'est pas nul, les rapports f_{k+1}/f_k restent proches de $1 - \hat{p}$, conformément à la question 1b.

Le modèle est raisonnable si les fréquences observées sont proches des probabilités géométriques correspondantes.

Exercice 2

Partie I

1. (a) Pour t assez grand, on a $t \geq 4|a|$, donc

$$t^2 + 2at \geq t^2 - 2|a|t \geq \frac{t^2}{2}.$$

Il en résulte

$$0 \leq t^2 e^{-2at - t^2} \leq t^2 e^{-t^2/2}.$$

Par croissances comparées, $t^2 e^{-t^2/2} \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement donne alors

$$e^{-2at-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

- (b) La fonction $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, il existe $A > 0$ tel que, pour $t \geq A$,

$$0 \leq e^{-2at-t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale $\int_A^{+\infty} dt/t^2$ converge. Le critère de comparaison montre que l'intégrale définissant J_a converge. Ainsi,

$$J_a \text{ converge pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$I_a(x) = e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt.$$

L'intégrale sur le segment d'extrémités x et 0 existe par continuité, et l'intégrale de 0 à $+\infty$ converge d'après la question 1b. Ainsi,

$$I_a \text{ est définie sur } \mathbb{R}.$$

3. (a) Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$ converge, la définition de sa convergence donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt = 0.$$

- (b) Supposons $a > 0$. Pour $t \geq x$, $2a(x-t) \leq 0$, donc $e^{2a(x-t)} \leq 1$. Par conséquent,

$$0 \leq e^{2a(x-t)-t^2} \leq e^{-t^2}.$$

En intégrant de x à $+\infty$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

- (c) Si $a < 0$, alors

$$I_a(x) = e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt.$$

Les deux facteurs tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$, donc leur produit tend vers 0. Si $a = 0$, la question 3a donne directement le résultat. Enfin, si $a > 0$, la question 3b et la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ permettent d'appliquer le théorème d'encadrement. Dans les trois cas,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} I_a(x) = 0.$$

Partie II

4. L'équation homogène est $y' = 2ay$. Ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont

$$y : x \mapsto Ce^{2ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

5. (a) La fonction $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème fondamental de l'analyse assure que F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'_a(x) = e^{-2ax-x^2}.$$

- (b) Par relation de Chasles,

$$J_a - F_a(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt - \int_0^x e^{-2at-t^2} dt = \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt.$$

Après multiplication par e^{2ax} ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_a(x) = e^{2ax}(J_a - F_a(x)).$$

- (c) L'expression précédente est un produit de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} I'_a(x) &= 2ae^{2ax}(J_a - F_a(x)) - e^{2ax}F'_a(x) \\ &= 2aI_a(x) - e^{2ax}e^{-2ax-x^2} \\ &= 2aI_a(x) - e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$I_a \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad I'_a = 2aI_a - e^{-x^2}.$$

6. La fonction I_a est une solution particulière de (1). La différence de deux solutions de (1) est solution de l'équation homogène. On obtient donc toutes les solutions :

$$y : x \mapsto I_a(x) + Ce^{2ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

7. Toute solution s'écrit $y(x) = I_a(x) + Ce^{2ax}$, et $I_a(x) \rightarrow 0$ d'après la question 3c.

- (a) Si $a < 0$, $e^{2ax} \rightarrow 0$. Toute valeur de C convient :

$$a < 0 : \quad y : x \mapsto I_a(x) + Ce^{2ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- (b) Si $a = 0$, $e^{2ax} = 1$. La limite de y vaut C , donc $C = 0$:

$$a = 0 : \quad y = I_0.$$

- (c) Si $a > 0$, $e^{2ax} \rightarrow +\infty$. La limite demandée impose encore $C = 0$:

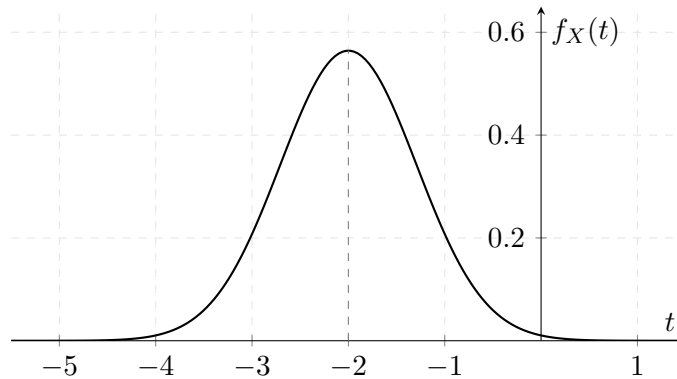
$$a > 0 : \quad y = I_a.$$

Partie III

8. (a) On a $\mathbb{E}(X) = -a$ et $\mathbb{V}(X) = 1/2$. Une densité de X est donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(t+a)^2}.$$

- (b) Pour $a = 2$, la densité atteint son maximum en -2 et sa courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -2$.



La courbe est une cloche centrée en -2 .

9. (a) Par définition d'une variable à densité,

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-(t+a)^2} dt.$$

- (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$-(t+a)^2 = -t^2 - 2at - a^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} e^{2ax+a^2} \mathbb{P}(X \geq x) &= e^{2ax+a^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2-2at-a^2} dt \\ &= \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt \\ &= I_a(x). \end{aligned}$$

Donc

$$I_a(x) = \sqrt{\pi} e^{2ax+a^2} \mathbb{P}(X \geq x).$$

10. (a) Si Z suit la loi normale centrée réduite, alors $\alpha Z + \beta$ suit une loi normale d'espérance β et de variance α^2 . On choisit

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \beta = -a.$$

- (b) `import numpy as np`
`import numpy.random as rd`

```
def estim_proba(a,x):
    num = 0
    for i in range(10000):
```

```

Z = rd.normal()
X = -a + Z/np.sqrt(2)
if X >= x:
    num = num + 1
return num/10000

```

11. On utilise l'égalité établie à la question 9b.

```

def approx_I(a,x):
    return np.sqrt(np.pi)*np.exp(2*a*x+a**2)*estim_proba(a,x)

```

Exercice 3

Partie I

1. (a) La matrice M est réelle et symétrique puisque ${}^tM = M$. D'après le théorème spectral,

M est diagonalisable.

(b) On calcule

$$M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (M + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M + I_3).$$

Ainsi,

$$M^2 + 2M + I_3 = 3M + 3I_3,$$

soit

$$(M + I_3)^2 = 3(M + I_3) \quad \text{et} \quad M^2 - M - 2I_3 = 0_3.$$

Le polynôme $Q(X) = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ est donc annulateur de M .

- (c) Par inclusion du spectre dans les racines du polynôme annulateur, les seules valeurs propres possibles sont -1 et 2 . Or

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc 2 est valeur propre et

$$E_2(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Par ailleurs, $MU = -U$ équivaut à $(M + I_3)U = 0$. Pour $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, cela donne

$$x + y + z = 0.$$

Ainsi,

$$E_{-1}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Finalement,

$$\begin{array}{c} \text{Valeurs propres de } M : -1 \text{ et } 2, \\ E_{-1}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad E_2(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{array}$$

(d) Posons

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne

$$PQ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{et} \quad QP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3.$$

La matrice P est donc inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Les deux premières colonnes de P sont des vecteurs propres associés à -1 , et la troisième est un vecteur propre associé à 2 . Par conséquent, $MP = PD$, avec

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(f) Pour $k = 0$,

$$PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3 = M^0.$$

Supposons $M^k = PD^kP^{-1}$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$. Comme $M = PDP^{-1}$,

$$M^{k+1} = M^kM = PD^kP^{-1}PDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}.$$

La propriété est initialisée et héréditaire. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = PD^kP^{-1}.$$

(g) Soit $U \neq 0$ un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda \in \{-1, 2\}$. L'égalité $M^k = a_kM + b_kI_3$ donne

$$\lambda^k U = (a_k\lambda + b_k)U.$$

Pour $\lambda = -1$ puis $\lambda = 2$, on obtient

$$\begin{cases} -a_k + b_k = (-1)^k, \\ 2a_k + b_k = 2^k. \end{cases}$$

En soustrayant les deux lignes, puis en remplaçant,

$$a_k = \frac{2^k - (-1)^k}{3}, \quad b_k = \frac{2^k + 2(-1)^k}{3}.$$

Donc

$$a_k = \frac{2^k - (-1)^k}{3}, \quad b_k = \frac{2^k + 2(-1)^k}{3}.$$

2. (a) Le coefficient d'indice (i, j) de J_n^2 est la somme de n termes égaux à 1, donc $J_n^2 = nJ_n$.
Supposons $J_n^k = n^{k-1}J_n$ à un rang $k \geq 1$. Alors

$$J_n^{k+1} = J_n^k J_n = n^{k-1} J_n^2 = n^k J_n.$$

Par récurrence,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad J_n^k = n^{k-1} J_n.}$$

- (b) La matrice $J_n - I_n$ a des coefficients diagonaux nuls et tous ses autres coefficients égaux à 1. Ainsi,

$$\boxed{M_n = J_n - I_n.}$$

- (c) Les matrices J_n et I_n commutent. La formule du binôme donne, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} M_n^k &= (J_n - I_n)^k \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\ &= (-1)^k I_n + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} J_n. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{M_n^k = c_k J_n + (-1)^k I_n, \quad c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.}$$

- (d) En multipliant la définition de c_k par n ,

$$\begin{aligned} n c_k &= \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} - (-1)^k \\ &= (n-1)^k - (-1)^k. \end{aligned}$$

La dernière égalité est la formule du binôme. Donc

$$\boxed{c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.}$$

- (e) Dans $c_k J_n + (-1)^k I_n$, un coefficient non diagonal vaut c_k , alors qu'un coefficient diagonal vaut $c_k + (-1)^k$. Or

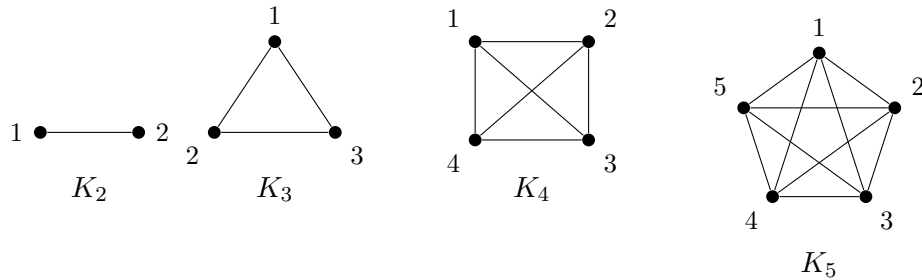
$$c_k + (-1)^k = \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{coefficient diagonal : } \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n}, \\ \text{coefficient non diagonal : } \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}. \end{array}}$$

Partie II

3. Voici des représentations des quatre graphes complets.



Chaque paire de sommets distincts est reliée par une arête.

4. (a) Il n'existe pas d'arête d'un sommet vers lui-même, donc les coefficients diagonaux sont nuls. Tous les autres coefficients valent 1. Ainsi,

la matrice d'adjacence de K_n est M_n .

- (b) Le nombre de chaînes de longueur 4 du sommet 1 au sommet 1 est le coefficient d'indice $(1, 1)$ de M_4^4 . D'après la question 2e,

$$\frac{(4-1)^4 + (4-1)(-1)^4}{4} = \frac{81 + 3}{4} = 21.$$

Donc

Il existe 21 chaînes de longueur 4.

5. Chaque sommet est relié aux $n - 1$ autres sommets et non à lui-même. Par conséquent,

chaque sommet de K_n est de degré $n - 1$.

6. La somme des degrés vaut $n(n - 1)$. Chaque arête est comptée deux fois dans cette somme, une fois pour chacune de ses extrémités. Le nombre d'arêtes vaut donc

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Partie III

7. À l'étape 0, on se trouve certainement au sommet 1 :

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Au premier déplacement, chacun des sommets $2, \dots, n$ est choisi avec la probabilité $1/(n-1)$, tandis que le sommet 1 est impossible. Ainsi,

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}.$$

8. Depuis un sommet i , on ne peut pas rester en i , et chacun des $n - 1$ autres sommets est choisi avec la probabilité $1/(n - 1)$. La matrice de transition est donc

$$A = \frac{1}{n-1} M_n.$$

9. (a) D'après la définition d'un état stable, il s'agit d'une matrice ligne W dont les coefficients sont positifs ou nuls, de somme 1, et qui vérifie $WA = W$, où A est la matrice de transition. Ainsi,

$$W \text{ est stable} \iff W \text{ est un état probabiliste et } WA = W.$$

- (b) Les coefficients de V sont positifs et leur somme vaut 1. Pour chaque indice j , le coefficient d'indice j de VM_n vaut la somme des $n - 1$ coefficients de V dont l'indice est différent de j :

$$(VM_n)_j = \frac{n-1}{n}.$$

Ainsi,

$$VA = \frac{1}{n-1}VM_n = \left(\frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n}\right) = V.$$

Donc

$$V = \left(\frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n}\right) \text{ est un état stable.}$$

10. (a) Pour une chaîne de Markov de matrice de transition $A = M_n/(n-1)$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_{k+1} = V_k A = \frac{1}{n-1} V_k M_n.$$

- (b) Pour $k = 0$, l'égalité est immédiate. En appliquant successivement la relation précédente,

$$V_k = V_0 A^k = V_0 \left(\frac{M_n}{n-1}\right)^k.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 M_n^k.$$

- (c) Pour $k \geq 1$, la question 2e donne

$$M_n^k = c_k J_n + (-1)^k I_n.$$

Or

$$V_0 J_n = \left(1 \quad \dots \quad 1\right), \quad V_0 I_n = V_0.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{c_k + (-1)^k}{(n-1)^k} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \left(\frac{-1}{n-1}\right)^k,$$

et, pour $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X_k = j) = \frac{c_k}{(n-1)^k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \left(\frac{-1}{n-1}\right)^k.$$

Si $n \geq 3$, alors $(-1/(n-1))^k \rightarrow 0$. Pour chaque j ,

$$\mathbb{P}(X_k = j) \longrightarrow \frac{1}{n}.$$

Soit U une variable de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions de répartition sont des sommes finies des probabilités précédentes ; elles convergent donc vers $\mathbb{P}(U \leq x)$. D'après la définition de la convergence en loi,

$$n \geq 3 : \quad X_k \xrightarrow{\mathcal{L}} U, \quad U \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket).$$

Si $n = 2$, le déplacement est imposé à chaque étape : $X_{2k} = 1$ et $X_{2k+1} = 2$. Pour $x \in [1, 2[$,

$$\mathbb{P}(X_{2k} \leq x) = 1, \quad \mathbb{P}(X_{2k+1} \leq x) = 0.$$

La fonction de répartition ne converge donc pas en ce point. Ainsi,

$n = 2 : \quad (X_k) \text{ ne converge pas en loi.}$

11. La question 9b établit que la loi uniforme est stable pour tout $n \geq 2$. La question 10c montre que, depuis le sommet 1, la loi de X_k tend vers cette loi stable lorsque $n \geq 3$. En revanche, pour $n = 2$, la loi uniforme reste stable si elle est choisie au départ, mais la chaîne issue du sommet 1 alterne entre les deux sommets. Donc

L'existence d'un état stable n'impose pas à elle seule la convergence vers cet état.
--