

Corrigé Ecricome 2025

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	3
Exercice 3	6

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2025.

Exercice 1

1. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$0_3 M + M 0_3 = 0_3.$$

Ainsi, toutes les matrices conviennent. Par ailleurs,

$$I_3 M + M I_3 = 2M,$$

et cette matrice est nulle si et seulement si $M = 0_3$. Donc

$$E_{0_3} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad E_{I_3} = \{0_3\}.$$

2. Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice nulle appartient à E_C . Soient $M, N \in E_C$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Par distributivité,

$$\begin{aligned} C(\alpha M + \beta N) + (\alpha M + \beta N)C &= \alpha(CM + MC) + \beta(CN + NC) \\ &= \alpha 0_3 + \beta 0_3 = 0_3. \end{aligned}$$

Donc $\alpha M + \beta N \in E_C$. D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels,

$$E_C \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

3. La matrice A est symétrique : ${}^t A = A$. Si $M \in E_A$, alors $AM + MA = 0_3$. En transposant cette égalité et en utilisant ${}^t(UV) = {}^t V {}^t U$, on obtient

$${}^t M {}^t A + {}^t A {}^t M = 0_3,$$

soit, puisque ${}^t A = A$,

$$A {}^t M + {}^t M A = 0_3.$$

Par conséquent,

$$M \in E_A \implies {}^t M \in E_A.$$

4. (a) La matrice A est une matrice symétrique réelle. Le théorème spectral donne donc

$$A \text{ est diagonalisable.}$$

(b) Un calcul direct fournit

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} = 9A.$$

Ainsi, $A^3 - 9A = 0_3$. Si λ est une valeur propre de A et $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé, alors

$$(A^3 - 9A)U = (\lambda^3 - 9\lambda)U = 0.$$

Comme $U \neq 0$, il vient

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0.$$

- (c) D'après la question précédente et l'inclusion du spectre dans les racines d'un polynôme annulateur, les valeurs propres éventuelles sont $-3, 0$ et 3 . Or

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On choisit donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les trois colonnes de P , associées à des valeurs propres distinctes, forment une famille libre. Ainsi P est inversible, ses coefficients diagonaux valent tous 1, et $AP = PD$. Finalement,

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = P^{-1}AP.$$

5. On effectue le produit :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3.$$

Donc $P(P/9) = I_3 = (P/9)P$, d'où

$$P^2 = 9I_3 \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{9}P.$$

6. (a) Avec $D = \text{diag}(-3, 0, 3)$, on trouve

$$DN + ND = \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est nulle si et seulement si $a = b = d = f = h = i = 0$, tandis que c, e, g sont quelconques. Ainsi,

$$N \in E_D \iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c, e, g) \in \mathbb{R}^3.$$

- (b) Posons

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente, toute matrice de E_D s'écrit de manière unique $cB_1 + eB_2 + gB_3$. Par conséquent,

$$\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3) \text{ est une base de } E_D \text{ et } \dim(E_D) = 3.$$

7. (a) Comme $A = PDP^{-1}$ et $M = PNP^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} AM + MA &= PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} \\ &= P(DN + ND)P^{-1}. \end{aligned}$$

La multiplication à gauche par P^{-1} et à droite par P montre alors

$$\boxed{M \in E_A \iff N = P^{-1}MP \in E_D.}$$

- (b) L'application $N \mapsto PNP^{-1}$ est linéaire et bijective de E_D sur E_A , son application réciproque étant $M \mapsto P^{-1}MP$. Elle transforme donc une base de E_D en une base de E_A . Par conséquent,

$$\boxed{(PB_1P^{-1}, PB_2P^{-1}, PB_3P^{-1}) \text{ est une base de } E_A.}$$

8. En développant par distributivité,

$$(A + M)^2 = A^2 + AM + MA + M^2.$$

Ainsi, $(A + M)^2 = A^2 + M^2$ si et seulement si $AM + MA = 0_3$, c'est-à-dire si et seulement si $M \in E_A$. D'après la question précédente,

$$\boxed{\left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : (A + M)^2 = A^2 + M^2\right\} = \left\{P(cB_1 + eB_2 + gB_3)P^{-1} : (c, e, g) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

9. Par définition, $\text{Ker}(\varphi) = E_A$. La question 7 montre que $\dim(E_A) = \dim(E_D) = 3$. Or $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension 9. Le théorème du rang donne

$$\dim \text{Ker}(\varphi) + \text{rg}(\varphi) = 9.$$

Donc

$$\boxed{\text{rg}(\varphi) = 9 - 3 = 6.}$$

Exercice 2

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissances comparées,

$$t^n e^{-t/2} \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

La fonction intégrée est donc négligeable devant $1/t^2$, or

Or $\int_1^{+\infty} 1/t^2 dt$ converge par Riemann donc par comparaison,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \text{ converge.}}$$

- (b) On calcule directement

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Pour I_1 , on applique une intégration par parties sur $[0, A]$ avec $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-t}$, donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$; ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. Ainsi,

$$\int_0^A t e^{-t} dt = \left[-t e^{-t}\right]_0^A + \int_0^A e^{-t} dt.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ et en utilisant les croissances comparées, on obtient

$$\boxed{I_0 = 1 \quad \text{et} \quad I_1 = 1.}$$

2. Pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$, $1 + xt \geq 1$, donc

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{1 + xt} \leq e^{-t}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, le critère de comparaison donne

$$\forall x \geq 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt \text{ converge.}$$

3. En prenant $x = 0$,

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = I_0.$$

Ainsi,

$$F(0) = 1.$$

4. Si $0 \leq x \leq y$, alors, pour tout $t \geq 0$, $1 + xt \leq 1 + yt$. Ces quantités étant positives,

$$\frac{e^{-t}}{1 + yt} \leq \frac{e^{-t}}{1 + xt}.$$

L'intégration conserve l'inégalité, donc $F(y) \leq F(x)$. Ainsi,

$$F \text{ est décroissante sur } [0, +\infty[.$$

5. (a) Pour $x = 0$,

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + xt} = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Pour $x > 0$, une primitive de $t \mapsto 1/(1 + xt)$ est $t \mapsto \ln(1 + xt)/x$. Donc

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + xt} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\ln(1 + x)}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

- (b) Pour $t \in [0, 1]$, $0 < e^{-t} \leq 1$ et $1 + xt > 0$. Donc

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{1 + xt} \leq \frac{1}{1 + xt}.$$

En intégrant sur $[0, 1]$,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{1 + xt}.$$

- (c) Si $x > 0$ et $t \geq 1$, alors $1 + xt \geq x$. Par conséquent,

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{1 + xt} \leq \frac{e^{-t}}{x}.$$

En intégrant sur $[1, +\infty[$,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt.$$

(d) Pour $x > 0$, les questions précédentes donnent

$$0 \leq F(x) \leq \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{e^{-1}}{x}.$$

On a $\ln(1+x)/x \rightarrow 0$ par croissances comparées. De plus, $e^{-1}/x \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement conduit à

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

6. Soit $x \geq 0$.

(a) Pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{1}{1+xt} - (1-xt) = \frac{1 - (1-xt)(1+xt)}{1+xt} = \frac{x^2 t^2}{1+xt}.$$

En multipliant par e^{-t} puis en intégrant, on obtient

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt.$$

(b) Puisque $1+xt \geq 1$,

$$0 \leq \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq t^2 e^{-t}.$$

La question précédente et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt = I_0 - xI_1$$

donnent alors

$$0 \leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2.$$

7. (a) Comme $I_0 = I_1 = 1$, pour $x > 0$,

$$0 \leq F(x) - 1 + x \leq x^2 I_2.$$

Après division par x ,

$$0 \leq \frac{F(x) - 1 + x}{x} \leq x I_2.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 0^+$. Le théorème d'encadrement donne $F(x) - 1 + x = o(x)$. Ainsi,

$$F(x) = 1 - x + o(x) \quad (x \rightarrow 0^+).$$

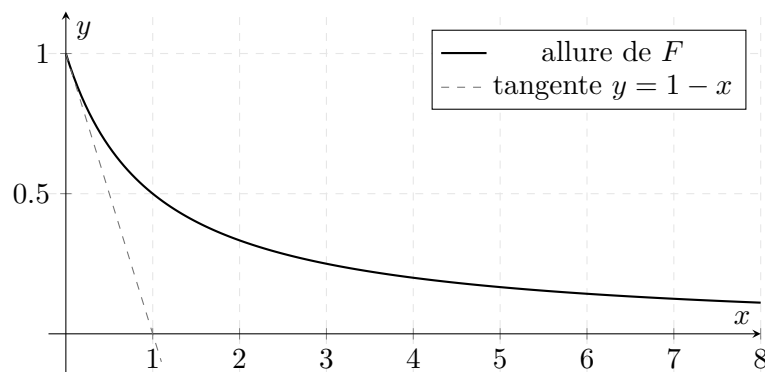
(b) En utilisant $F(0) = 1$,

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = -1 + o(1) \rightarrow -1 \quad (x \rightarrow 0^+).$$

La fonction est donc dérivable à droite en 0, ce qui correspond à sa dérivabilité à l'extrémité de son domaine, et

$$F'(0) = -1.$$

8. La fonction F est continue, décroissante, vérifie $F(0) = 1$ et tend vers 0 en $+\infty$. Sa tangente en 0 a pour équation $y = 1 - x$.



La courbe représentée est seulement une allure compatible avec toutes les propriétés démontrées; elle ne prétend pas donner une expression de F .

La courbe part de $(0, 1)$ avec la tangente $y = 1 - x$, décroît et tend vers 0.

Exercice 3

Partie I

1. La fonction f_i est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{i}{x^{i+1}} dx = \left[-\frac{1}{x^i} \right]_1^{+\infty} = 1.$$

Ainsi,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f_i \text{ est une densité de probabilité.}$$

2. (a) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_i(x) dx = i \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^i}.$$

Cette intégrale converge si et seulement si $i > 1$. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X_i) = i \int_1^{+\infty} x^{-i} dx = i \left[\frac{x^{1-i}}{1-i} \right]_1^{+\infty} = \frac{i}{i-1}.$$

Par conséquent,

$$X_i \text{ admet une espérance si et seulement si } i \geq 2, \quad \text{et alors } \mathbb{E}(X_i) = \frac{i}{i-1}.$$

- (b) Pour $i \geq 2$,

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 + \frac{1}{i-1},$$

qui décroît lorsque i augmente. Les revenus moyens sont donc rangés du moins élevé au plus élevé en prenant les indices dans l'ordre décroissant :

$$\text{classement : } n, n-1, \dots, 2 \quad (\text{liste vide si } n=1).$$

3. Si $x < 1$, comme $X_i \geq 1$, on a $F_i(x) = 0$. Si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \mathbb{P}(X_i \leq x) = \int_1^x \frac{i}{t^{i+1}} dt \\ &= \left[-\frac{1}{t^i} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^i}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

4. (a) On a $V_i \geq 1$. Si $x < 1$, $\mathbb{P}(V_i \leq x) = 0$. Si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_i \leq x) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(U \geq \frac{1}{x^i}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{x^i}, \end{aligned}$$

car U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$. La fonction de répartition de V_i est donc F_i . Par conséquent,

$$V_i \text{ suit la même loi que } X_i.$$

(b) `import numpy.random as rd`

```
def simulX(i):
    U = rd.random()
    return 1/(U**(1/i))
```

Partie II

5. La variable $Y - 1$ est la somme de $n - 1$ variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p . On les simule successivement.

```
def simulY(n,p):
    y = 1
    for k in range(n-1):
        if rd.random() < p:
            y = y+1
    return y
```

6. On compte les occurrences de chaque valeur, avec un décalage d'une unité pour l'indice de la liste.

```
def loiY(n,p):
    N = 10000
    loi = [0]*n
    for k in range(N):
        y = simulY(n,p)
        loi[y-1] = loi[y-1]+1/N
    return loi
```

7. `import matplotlib.pyplot as plt`

```
def diagrammeY(n,p):
    x = range(1,n+1)
    plt.bar(x,loiY(n,p))
    plt.show()
```

8. (a) Une clé primaire doit identifier chaque entrée de manière unique : elle ne peut donc ni prendre deux fois la même valeur, ni être absente.

Une clé primaire est unique pour chaque entrée et toujours renseignée.

- (b) Les identifiants naturels proposés dans la description conviennent :

table	clé primaire
individu	i_insee
departement	d_numero
profession	p_pcs

- (c) Les attributs `i_departement` et `i_code_profession` sont des clés étrangères :

`individu.i_departement` $\rightarrow$ `departement.d_numero`,
`individu.i_code_profession` $\rightarrow$ `profession.p_pcs`.

La table `individu` est ainsi reliée à chacune des deux autres tables.

- (d)

```
SELECT DISTINCT i_code_profession FROM individu
WHERE i_departement = 28;
```

- (e)

```
SELECT i_insee, p_categorie FROM individu
INNER JOIN profession
ON i_code_profession = p_pcs;
```

Partie III

9. Quelle que soit la catégorie choisie, le revenu est supérieur ou égal à 1. Pour $x < 1$,

$$G_n(x) = \mathbb{P}(Z_n \leq x) = 0.$$

10. Soit $x \geq 1$.

- (a) Conditionnellement à $[Y = i]$, l'individu est choisi dans la catégorie i et son revenu suit donc la même loi que X_i . Ainsi,

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leq x) = F_i(x).$$

- (b) Les événements $([Y = i])_{1 \leq i \leq n}$ forment un système complet d'événements. Les formules des probabilités totales donnent

$$G_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leq x) \mathbb{P}(Y = i).$$

Or $Y - 1$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n - 1, p)$, donc

$$\mathbb{P}(Y = i) = \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i}.$$

En posant $k = i - 1$, il vient

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}.$$

(c) Pour $x \geq 1$, $F_{k+1}(x) = 1 - x^{-(k+1)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &\quad - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{p}{x}\right)^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= 1 - \frac{1}{x} \left(1 - p + \frac{p}{x}\right)^{n-1} \\ &= 1 - \frac{(p + (1-p)x)^{n-1}}{x^n}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule du binôme. Donc

$$G_n(x) = 1 - \frac{(p + (1-p)x)^{n-1}}{x^n}.$$

11. La fonction G_n est continue sur $\mathbb{R}$: en particulier, son expression pour $x \geq 1$ vaut 0 en $x = 1$, comme son expression pour $x < 1$. Elle est dérivable sauf éventuellement en 1. En dérivant là où elle est dérivable, on obtient une densité g_n :

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{(p + (1-p)x)^{n-2} (np + (1-p)x)}{x^{n+1}}, & x > 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

La valeur en 1 peut être choisie arbitrairement, par exemple égale à 0. Ainsi,

$$Z_n \text{ est une variable aléatoire à densité, de densité } g_n.$$

12. `def sondage(n,p):`
`y = simulY(n,p)`
`return simulX(y)`

13. On suppose $p = 1/n$.

(a) Si $x < 1$, $G_n(x) = 0$. Si $x \geq 1$, la question 10 donne

$$\begin{aligned} G_n(x) &= 1 - \frac{\left(\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x\right)^{n-1}}{x^n} \\ &= 1 - \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

- (b) Pour $x < 1$, $G_n(x) = 0$ pour tout n . Pour $x \geq 1$, posons $a = (x - 1)/x$. La limite classique de la suite $(1 - a/n)^n$ donne

$$\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} \longrightarrow \exp\left(-\frac{x-1}{x}\right).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G_n(x) \longrightarrow G(x), \quad G(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x-1}{x}\right), & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

La fonction G est continue en 1, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$. Pour $x > 1$,

$$G'(x) = \exp\left(-\frac{x-1}{x}\right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) > 0.$$

Elle est donc une fonction de répartition, continue sur $\mathbb{R}$. On applique alors la propriété suivante :

définition de la convergence en loi.

On en déduit

$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z,$
$Z \text{ a pour fonction de répartition } G.$