

Corrigé Ecricome 2026

Mathématiques appliquées

Sommaire	
Exercice 1	1
Exercice 2	5
Exercice 3	10

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques appliquées de Ecricome 2026.

Exercice 1

1. La première compagnie est choisie avec équiprobabilité parmi les n compagnies. Ainsi, X suit la loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Les formules de cette loi donnent

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Donc

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

2. Soit $(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Conditionnellement à $[X = j]$, la seconde compagnie est choisie avec équiprobabilité parmi les j compagnies numérotées de 1 à j . Par conséquent,

$$\mathbb{P}_{[X=j]}([Y = k]) = \begin{cases} \frac{1}{j}, & k \leq j, \\ 0, & k \geq j+1. \end{cases}$$

Comme $\mathbb{P}(X = j) = 1/n$, la formule des probabilités composées donne

$$\mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \mathbb{P}(X = j) \mathbb{P}_{[X=j]}(Y = k).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \begin{cases} \frac{1}{nj}, & k \leq j, \\ 0, & k \geq j+1. \end{cases}$$

3. En sommant les probabilités de la loi conjointe sur toutes les valeurs possibles, on obtient

$$1 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j}.$$

Il en résulte

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} = n.$$

4. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les événements $([X = j])_{1 \leq j \leq n}$ forment un système complet d'événements. Les formules des probabilités totales donnent

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^n \frac{1}{j}.$$

5. (a) Dans la somme considérée, les couples d'indices vérifient $1 \leq k \leq j \leq n$. On peut donc sommer d'abord par rapport à k :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{k}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1).$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1).$$

- (b) La variable Y ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc son espérance existe. D'après la question 4,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (j+1) = \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n+3}{4}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{n+3}{4}.$$

6. (a) La variable XY ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc son espérance existe. En utilisant la loi conjointe,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j jk \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j jk \frac{1}{nj} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1).\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1).$$

- (b) Les identités usuelles sur les sommes donnent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{(n+1)(2n+4)}{12} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \frac{(n+1)(n+2)}{6}.$$

- (c) Par définition,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n+1}{2} \frac{n+3}{4} \\ &= \frac{(n+1)(4n+8-3n-9)}{24} = \frac{(n+1)(n-1)}{24}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = \frac{n^2 - 1}{24}.$$

7. Si X et Y étaient indépendantes, leur covariance serait nulle. Or $n \geq 2$, donc

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{n^2 - 1}{24} > 0.$$

On en déduit

X et Y ne sont pas indépendantes.

8. (a) Une réalisation de X est choisie uniformément entre 1 et n , puis une réalisation de Y , conditionnellement à la première, est choisie uniformément entre 1 et X .

```
import numpy.random as rd
```

```
def simulXY(n):
    X = rd.randint(1,n+1)
    Y = rd.randint(1,X+1)
    return [X,Y]
```

- (b) La matrice M contient sur sa diagonale les variances empiriques v_x et v_y , et hors diagonale la covariance empirique $s_{x,y}$. La fonction renvoie donc

$$R = \frac{s_{x,y}}{\sqrt{v_x v_y}},$$

c'est-à-dire

le coefficient de corrélation linéaire empirique de x et y .

- (c) La droite d'ajustement affine de y en x a pour coefficient directeur théorique

$$\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\mathbb{V}(X)} = \frac{(n^2 - 1)/24}{(n^2 - 1)/12} = \frac{1}{2}.$$

Elle passe par le point moyen, dont les coordonnées théoriques sont

$$\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{4} \right).$$

Son ordonnée à l'origine vaut donc

$$\frac{n+3}{4} - \frac{1}{2} \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2},$$

et son équation théorique est $y = x/2 + 1/2$. Pour la série observée, la droite recherchée doit être une véritable droite, être croissante et passer par la croix représentant le point moyen. Parmi les quatre tracés, seul le tracé 2 possède ces propriétés : le tracé 1 est une ligne brisée, le tracé 3 ne passe pas par la croix et le tracé 4 est décroissant. Ainsi,

la droite d'ajustement correspond au tracé 2.

9. (a) Le particulier conserve la même compagnie exactement lorsque les deux numéros sont égaux. Ainsi,

$$A_n = [X = Y].$$

- (b) Les événements $([X = j] \cap [Y = j])_{1 \leq j \leq n}$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est A_n . Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = j]) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{nj}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

- (c) La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in [j, j+1]$, on a donc

$$\frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{j}.$$

En intégrant ces inégalités sur le segment $[j, j+1]$, il vient

$$\frac{1}{j+1} \leq \int_j^{j+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{j}.$$

Or l'intégrale centrale vaut $\ln(j+1) - \ln(j)$. Ainsi,

$$\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}.$$

- (d) En sommant l'inégalité de droite pour j allant de 1 à n , on obtient

$$\ln(n+1) = \sum_{j=1}^n (\ln(j+1) - \ln(j)) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

En sommant l'inégalité de gauche pour j allant de 1 à $n-1$, on trouve

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \leq \ln(n).$$

Donc

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \leq 1 + \ln(n).$$

Après division par n ,

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \leq \mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}.$$

- (e) On divise l'encadrement précédent par $\ln(n)/n$, positif pour $n \geq 2$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\ln(n)/n} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Or

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{1}{\ln(n)} \rightarrow 1.$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$\mathbb{P}(A_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

10. (a) Il faut compter les lignes pour lesquelles les deux identifiants coïncident :

```
SELECT COUNT(*) FROM adherent
WHERE id_2025 = id_2026;
```

- (b) La jointure associe à chaque assuré la ligne de la table **compagnie** dont l'identifiant est celui de sa compagnie en 2026. La requête affiche ensuite le numéro de l'assuré et le nom de cette compagnie. Ainsi,

la requête affiche chaque assuré et le nom de sa compagnie en 2026.

- (c) On regroupe les avis par compagnie, puis on calcule la moyenne des notes de chaque groupe :

```
SELECT compagnie, AVG(note) AS note
FROM avis
GROUP BY compagnie;
```

- (d) Il suffit de trier la table **moyenne** par note décroissante :

```
SELECT * FROM moyenne
ORDER BY note DESC;
```

Exercice 2

Partie I

1. L'expression $\ln(1/(1-x))$ existe si et seulement si $1/(1-x) > 0$. Le numérateur étant positif, cette condition équivaut à $1-x > 0$, soit $x < 1$. Ainsi,

$$I =]-\infty, 1[.$$

2. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a $1-x \rightarrow +\infty$, donc $1/(1-x) \rightarrow 0$ par valeurs positives et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow 1^-$, on a $1-x \rightarrow 0$ par valeurs positives, donc $1/(1-x) \rightarrow +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

3. Pour tout $x < 1$, $f(x) = -\ln(1-x)$ et

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur I . Son tableau de variations est

x	$-\infty$	1
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

4. (a) On a $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et

$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(0) = 1.$$

La formule de Taylor–Young à l'ordre 2 en 0 donne

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0).$$

- (b) La tangente en 0 a pour équation

$$y = f(0) + f'(0)x = x.$$

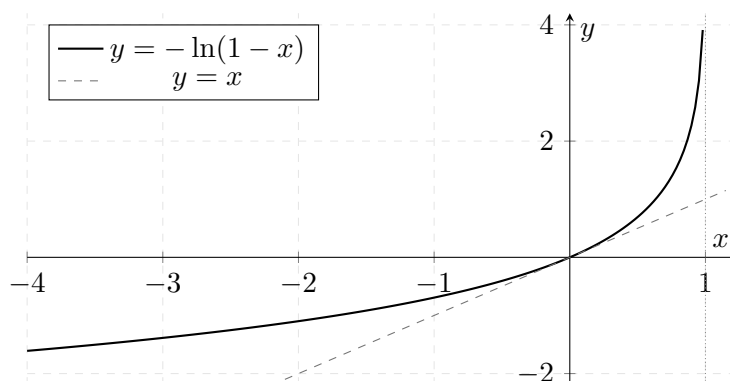
De plus,

$$f(x) - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2 \left(\frac{1}{2} + o(1) \right).$$

Le facteur entre parenthèses est positif pour x assez proche de 0. La courbe est donc au-dessus de sa tangente au voisinage de 0, avec égalité au point de contact. Ainsi,

la tangente est $y = x$ et la courbe est localement au-dessus.

5. La courbe est croissante, passe par l'origine, s'approche de la droite $x = 1$ lorsque $x \rightarrow 1^-$ et reste localement au-dessus de sa tangente :



la représentation ci-dessus respecte les variations et les limites de f .

Partie II

6. (a) La série harmonique est une série de référence divergente. Plus précisément, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. Ainsi,

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \text{ diverge.}$$

- (b) Pour tout $n \geq 1$,

$$S_{n+1}(1) - S_n(1) = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc

$(S_n(1))_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

(c) On a $S_n(1) = \sum_{k=1}^n 1/k$. D'après la nature de la série harmonique,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = +\infty.$$

7. Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout $k \geq 1$,

$$0 \leq \left| \frac{x^k}{k} \right| = \frac{|x|^k}{k} \leq |x|^k.$$

La série géométrique $\sum_{k \geq 1} |x|^k$ converge puisque $|x| < 1$. Par comparaison, la série des valeurs absolues converge. Ainsi,

$$\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} \text{ converge absolument pour } x \in]-1, 1[.$$

8. (a) Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} S_{2n+2}(-1) - S_{2n}(-1) &= -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} < 0, \\ S_{2n+3}(-1) - S_{2n+1}(-1) &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0. \end{aligned}$$

La suite $(S_{2n}(-1))$ est donc décroissante et $(S_{2n+1}(-1))$ est croissante. De plus,

$$S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0,$$

et $S_{2n+1}(-1) \leq S_{2n}(-1)$. Par définition,

$$(S_{2n}(-1)) \text{ et } (S_{2n+1}(-1)) \text{ sont adjacentes.}$$

(b) Les deux suites adjacentes convergent vers une même limite. Les termes d'indice pair et ceux d'indice impair ayant la même limite, la suite entière converge. Ainsi,

$$(S_n(-1))_{n \geq 1} \text{ converge.}$$

(c) La limite commune vaut $-\ln(2)$. Par monotonie,

$$S_{2n+1}(-1) \leq -\ln(2) \leq S_{2n}(-1).$$

Il en résulte

$$0 \leq \ln(2) + S_{2n}(-1) \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1),$$

d'où

$$|\ln(2) + S_{2n}(-1)| \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1).$$

(d) Si l'indice est pair, la question précédente donne

$$|\ln(2) + S_{2n}(-1)| \leq \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n}.$$

Si l'indice est impair, l'encadrement par les suites adjacentes donne

$$|\ln(2) + S_{2n+1}(-1)| \leq S_{2n+2}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \frac{1}{2n+2} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

Dans les deux cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\ln(2) + S_n(-1)| \leq \frac{1}{n}.$$

9. On suppose ici $x > 1$.

(a) Posons $h = x - 1 > 0$. Pour $k \geq 2$, la formule du binôme donne

$$x^k = (1 + h)^k \geq \binom{k}{2} h^2 = \frac{k(k-1)}{2} h^2.$$

Ainsi,

$$\frac{x^k}{k} \geq \frac{k-1}{2} h^2 \longrightarrow +\infty.$$

En particulier, le terme général ne tend pas vers 0. La condition nécessaire de convergence d'une série n'est pas satisfaite, donc

$$\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} \text{ diverge.}$$

(b) Tous les termes sont positifs. La suite $(S_n(x))$ est donc croissante. Elle ne peut pas converger puisque la série diverge ; elle tend donc vers $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = +\infty.$$

Partie III

10. (a) Comme $a \in]-1, 1[$, les fonctions considérées sont continues sur le segment d'extrémités 0 et a . On calcule

$$\int_0^a \frac{dt}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^a = -\ln(1-a) = f(a),$$

et

$$\int_0^a \frac{dt}{(1-t)^2} = \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^a = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}.$$

Ainsi,

$$\int_0^a \frac{dt}{1-t} = f(a), \quad \int_0^a \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{a}{1-a}.$$

(b) L'identité $a - t = (a - 1) + (1 - t)$ donne

$$\begin{aligned} R_1(a) &= \int_0^a \frac{a-t}{(1-t)^2} dt \\ &= (a-1) \int_0^a \frac{dt}{(1-t)^2} + \int_0^a \frac{dt}{1-t} \\ &= (a-1) \frac{a}{1-a} + f(a) = -a + f(a). \end{aligned}$$

Donc

$$f(a) = a + R_1(a).$$

11. Soit $n \geq 1$. On applique une intégration par parties sur le segment d'extrémités 0 et a . Les fonctions

$$u(t) = (a-t)^{n+1} \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{n+1} (1-t)^{-n-1}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment, et

$$u'(t) = -(n+1)(a-t)^n, \quad v'(t) = (1-t)^{-n-2}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} R_{n+1}(a) &= \int_0^a u(t)v'(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_0^a - \int_0^a u'(t)v(t) dt \\ &= -\frac{a^{n+1}}{n+1} + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \\ &= -\frac{a^{n+1}}{n+1} + R_n(a). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{R_n(a) = \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a).}$$

12. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$.

Pour $n = 1$, la question 10 donne

$$f(a) = a + R_1(a) = S_1(a) + R_1(a).$$

Supposons l'égalité vraie à un rang $n \geq 1$. D'après la question 11,

$$\begin{aligned} f(a) &= S_n(a) + R_n(a) \\ &= S_n(a) + \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a) \\ &= S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a). \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(a) = S_n(a) + R_n(a).}$$

13. On suppose dans cette question que $a \in [0, 1[$.

- (a) Pour $t \in [0, a]$, $a - t \geq 0$ et $1 - t > 0$, donc le quotient est positif. Par ailleurs,

$$\frac{a-t}{1-t} \leq a \iff a-t \leq a-at \iff t(1-a) \geq 0,$$

ce qui est vrai. Donc

$$\boxed{\forall t \in [0, a], \quad 0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a.}$$

- (b) On écrit

$$R_n(a) = \int_0^a \left(\frac{a-t}{1-t} \right)^n \frac{dt}{1-t}.$$

D'après la question précédente et puisque $1/(1-t) \leq 1/(1-a)$ sur $[0, a]$,

$$0 \leq R_n(a) \leq \int_0^a \frac{a^n}{1-a} dt = \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Ainsi,

$$\boxed{0 \leq R_n(a) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

- (c) Puisque $0 \leq a < 1$, la suite (a^{n+1}) tend vers 0. La question précédente et le théorème d'encadrement donnent $R_n(a) \rightarrow 0$. Or $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$ et $S_n(a) \rightarrow S(a)$. En passant à la limite,

$$f(a) = S(a).$$

14. (a) On applique la question 13 à $a = 1/2$. Comme $f(1/2) = \ln(2)$, on a

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} = R_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

De plus,

$$0 \leq R_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{(1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi,

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

- (b) On augmente n jusqu'à ce que la majoration $1/2^n$ soit inférieure ou égale à **eps**.

```
def Val(eps):
    n = 1
    s = 1/2
    while 1/(2**n) > eps:
        n = n+1
        s = s+1/(n*2**n)
    return s
```

- (c) La suite $(S_n(1/2))$ est croissante car on lui ajoute à chaque rang un terme positif. Elle correspond donc à la suite 1. En revanche, $(-S_n(-1))$ alterne de part et d'autre de sa limite $\ln(2)$: elle correspond à la suite 2. Ainsi,

$$\text{suite 1 : } S_n(1/2), \quad \text{suite 2 : } -S_n(-1).$$

Exercice 3

Partie I

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$s'(t) = x'(t) + y'(t) = x(t) + y(t) - x(t) - y(t) = 0.$$

Donc

$$s'(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction s est constante et

$$s(0) = x(0) + y(0) = 2.$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) + y(t) = 2, \quad \text{soit } y(t) = 2 - x(t).$$

3. La première équation et la question précédente donnent

$$x'(t) = x(t) + y(t) = 2.$$

Il existe donc une constante c telle que $x(t) = 2t + c$. La condition $x(0) = 1$ impose $c = 1$, d'où

$$x(t) = 1 + 2t, \quad y(t) = 2 - x(t) = 1 - 2t.$$

Ces fonctions vérifient bien les deux équations et les conditions initiales. L'unicité découle également du théorème de Cauchy. Ainsi,

$$\boxed{x(t) = 1 + 2t, \quad y(t) = 1 - 2t.}$$

Partie II

4. Posons

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et, de même, $QP = I_2$. Ainsi, P est inversible et

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

5. On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si λ est une valeur propre de A et $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé, alors

$$A^2U = \lambda^2U.$$

Comme $A^2 = 0_2$ et $U \neq 0$, on a $\lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$. Réciproquement,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc 0 est bien valeur propre. Ainsi,

$$\boxed{A \text{ possède l'unique valeur propre } 0.}$$

6. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux seraient ses valeurs propres. Comme sa seule valeur propre est 0, cette matrice diagonale serait nulle, et l'égalité de similitude imposerait $A = 0_2$. Or $A \neq 0_2$. Donc

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

7. En utilisant l'inverse trouvé à la question 4,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{J = P^{-1}AP.}$$

8. Un état d'équilibre est une matrice colonne constante $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $AX = 0$. Le système obtenu est

$$x + y = 0, \quad -x - y = 0.$$

Il équivaut à $y = -x$. Les états d'équilibre sont donc

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}.$$

9. Le système $(\mathcal{S})$ équivaut à $X' = AX$. Comme P est constante et $Y = P^{-1}X$, on a $Y' = P^{-1}X'$. Ainsi,

$$X' = AX \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = JY.$$

On a utilisé $J = P^{-1}AP$. Par conséquent,

$$\boxed{x, y \text{ résolvent } (\mathcal{S}) \iff Y' = JY.}$$

10. Le système $Y' = JY$ s'écrit

$$\begin{cases} u'(t) = v(t), \\ v'(t) = 0. \end{cases}$$

La seconde équation donne $v(t) = \beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$. La première donne alors $u'(t) = \beta$, donc $u(t) = \alpha + \beta t$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\boxed{Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.}$$

11. Puisque $X = PY$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ -\alpha + \beta(1 - t) \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est donc donné par

$$\boxed{x(t) = \alpha + \beta t, \quad y(t) = -\alpha + \beta(1 - t), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.}$$

Partie III

12. Puisque l'indice d'une matrice nilpotente d'ordre n est au plus n , il suffit de tester successivement les puissances de 1 à n .

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def Nil(M):
    Z = np.zeros(np.shape(M))
    for k in range(1, len(M)+1):
        if np.sum(np.abs(al.matrix_power(M, k) - Z)) == 0:
            return k
    return 0
```

13. Comme $N^p = 0_n$, si λ est une valeur propre de N et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé, alors

$$0_n U = N^p U = \lambda^p U.$$

Le vecteur U étant non nul, $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$. Une matrice réelle possède au moins une valeur propre dès lors qu'elle est nilpotente non nulle : en effet, $N^{p-1} \neq 0_n$, donc il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $N^{p-1}U \neq 0$. En posant $V = N^{p-1}U$, on a $V \neq 0$ et

$$NV = N^p U = 0.$$

Ainsi, 0 est valeur propre de N , et

N possède l'unique valeur propre 0.

14. Supposons par l'absurde que N soit diagonalisable. Elle serait alors semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux seraient nuls, puisque 0 est son unique valeur propre. Cette matrice diagonale serait 0_n , ce qui imposerait $N = 0_n$. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle N est non nulle. Donc

N n'est pas diagonalisable.

15. La somme qui définit $B(t)$ est finie. On peut donc la dériver terme à terme :

$$\begin{aligned} X'(t) &= B'(t)X_0 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{k t^{k-1}}{k!} N^k \right) X_0 \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$X'(t) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0.$$

16. D'une part,

$$\begin{aligned} NX(t) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^{k+1} X_0 \\ &= \sum_{k=0}^{p-2} \frac{t^k}{k!} N^{k+1} X_0, \end{aligned}$$

car $N^p = 0_n$. Après le changement d'indice $\ell = k + 1$,

$$NX(t) = \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} N^\ell X_0 = X'(t).$$

D'autre part,

$$X(0) = B(0)X_0 = I_n X_0 = X_0.$$

Ainsi, X résout bien le problème de Cauchy. Le second membre $X \mapsto NX$ est linéaire, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Le théorème de Cauchy assure l'unicité. Finalement,

$$X(t) = \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k \right) X_0 \text{ est l'unique solution.}$$

17. Dans la boucle, la matrice T contient successivement $t^k N^k / k!$.

```
def B(N,t):
    if Nil(N)==0:
        return("N n'est pas nilpotente")
    else:
        T = np.eye(len(N))
        S = T
        for k in range(1,Nil(N)):
            T = t/k * np.dot(T,N)
            S = S+T
        return S
```