

ESSEC

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2000

Table des matières

1	Minimisation de N_2 sur $\mathcal{P}_n$	2
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire ; intégrales.</i>	<i>2</i>
2	Minimisation de N_∞ sur $\mathcal{P}_n$	3
	<i>Thèmes abordés : suites ; fonctions d'une variable.</i>	<i>3</i>
3	Minimisation de N_1 sur $\mathcal{P}_n$	3
	<i>Thèmes abordés : suites ; intégrales ; fonctions d'une variable.</i>	<i>3</i>

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des fonctions polynomiales unitaires de degré n .

L'objectif est de déterminer les fonctions polynomiales $P \in \mathcal{P}_n$ qui minimisent, sur $\mathcal{P}_n$, chacune des trois expressions

$$N_1(P) = \int_{-1}^1 |P(x)| dx, \quad N_2(P) = \left(\int_{-1}^1 P(x)^2 dx \right)^{1/2}, \quad N_\infty(P) = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

Les trois parties qui suivent sont consacrées à ces problèmes de minimisation. La première est indépendante des deux suivantes.

1 Minimisation de N_2 sur $\mathcal{P}_n$

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire ; intégrales.

À tout couple (P, Q) de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le réel

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 \left(t^n - x_{n-1}t^{n-1} - x_{n-2}t^{n-2} - \dots - x_1t - x_0 \right)^2 dt.$$

- a) Citer précisément le théorème assurant l'existence et l'unicité d'un n -uplet $(a_0, \dots, a_{n-1})$ minimisant f , et noter m_n ce minimum. Montrer que ces réels vérifient, pour $0 \leq k < n$,

$$\int_0^1 \left(t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \dots - a_1t - a_0 \right) t^k dt = 0.$$

Expliciter ces n relations en calculant les intégrales.

- b) Pour tout réel $x \notin \{-1, -2, \dots, -n\}$, on pose

$$F(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{a_{n-1}}{x+n} - \frac{a_{n-2}}{x+n-1} - \dots - \frac{a_1}{x+2} - \frac{a_0}{x+1}.$$

Établir l'existence d'un réel a tel que, pour tout x ,

$$(x+n+1)(x+n) \cdots (x+1)F(x) = ax(x-1) \cdots (x-n+1).$$

Déterminer a en faisant tendre x vers $n-1$ dans les deux membres de cette égalité. On exprimera a en fonction de $n!$ et de $(2n)!$.

- c) Établir l'égalité

$$m_n = f(a_0, \dots, a_{n-1}) = \int_0^1 \left(t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \dots - a_1t - a_0 \right)^2 t^n dt.$$

d) Établir enfin que $m_n = F(n)$, puis en déduire

$$m_n = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}.$$

3. On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_2(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

a) Pour $P \in \mathcal{P}_n$, effectuer dans l'intégrale figurant dans l'expression de $N_2(P)$ le changement de variable $x = 2t - 1$, puis en déduire que

$$N_2(P) \geq 2^{n+1/2} \sqrt{m_n}.$$

b) En déduire le minimum de $N_2(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

2 Minimisation de N_∞ sur $\mathcal{P}_n$

Thèmes abordés : suites ; fonctions d'une variable.

On considère la suite (T_k) de fonctions définie par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ et, pour $k \geq 1$,

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$

On rappelle la formule $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

1. Étude de quelques propriétés des fonctions T_k .

- a) Montrer que T_k est une fonction polynomiale de degré k , de coefficient dominant 2^{k-1} pour $k \geq 1$.
- b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de θ les nombres $T_1(\cos \theta)$, $T_2(\cos \theta)$ et $T_3(\cos \theta)$, puis montrer que

$$T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$$

pour tout entier naturel k .

2. Résolution du problème de minimisation de N_∞ sur $\mathcal{P}_n$.

a) On suppose qu'il existe une fonction polynomiale $P \in \mathcal{P}_n$ telle que

$$N_\infty(P) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Préciser, pour $0 \leq k \leq n$, le signe de

$$\frac{(-1)^k}{2^{n-1}} T_n\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) - P\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right).$$

En déduire que $2^{1-n}T_n - P$ admet au moins n racines réelles, puis établir une contradiction en examinant son degré.

b) En déduire le minimum de $N_\infty(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

3 Minimisation de N_1 sur $\mathcal{P}_n$

Thèmes abordés : suites ; intégrales ; fonctions d'une variable.

On considère la suite (U_k) de fonctions définie par $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ et, pour $k \geq 1$,

$$U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x).$$

1. Étude de quelques propriétés des fonctions U_k .

- a) Montrer que U_k est une fonction polynomiale ; préciser son degré et son coefficient dominant. Établir aussi que $U_k(-x) = (-1)^k U_k(x)$.
- b) Déterminer les suites (u_k) vérifiant $u_{k+1} - 2 \cos \theta u_k + u_{k-1} = 0$. En déduire que, pour $\theta \in]0, \pi[$,

$$U_k(\cos \theta) = \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

Déterminer ensuite $U_k(1)$ et $U_k(-1)$ par passage à la limite.

- c) En dérivant la relation $T_{k+1}(\cos \theta) = \cos((k+1)\theta)$, exprimer $(k+1)U_k$ en fonction de la dérivée de T_{k+1} .

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\operatorname{sgn}(x)$ la fonction signe, définie par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On suppose qu'il existe une fonction polynomiale $P \in \mathcal{P}_n$ telle que

$$\int_{-1}^1 x^k \operatorname{sgn}(P(x)) \, dx = 0 \quad (0 \leq k < n). \quad (*)$$

- a) Prouver que, pour toute fonction polynomiale $Q \in \mathcal{P}_n$,

$$\int_{-1}^1 (Q(x) - P(x)) \operatorname{sgn}(P(x)) \, dx = 0.$$

- b) En déduire que $N_1(P) \leq N_1(Q)$.

- c) Calculer l'intégrale $N_1(U_n)$ au moyen du changement de variable $x = \cos\left(\frac{t}{n+1}\right)$, où t décrit $[0, (n+1)\pi]$. En admettant que la fonction polynomiale $2^{-n}U_n$ vérifie l'hypothèse (*), en déduire le minimum de $N_1(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_n$.

3. On démontre pour terminer que $2^{-n}U_n$ vérifie bien l'hypothèse (*). Pour $0 \leq j \leq n+1$, on pose

$$c_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right).$$

On notera que $-1 = c_{n+1} < c_n < \dots < c_1 < c_0 = 1$.

- a) Déterminer $U_n(c_j)$ pour $1 \leq j \leq n$ et le signe de $U_n(x)$ sur chacun des intervalles $]c_{n+1}, c_n[, \dots,]c_1, c_0[$. Pour $0 \leq k < n$, on considère

$$I_k = \int_{-1}^1 x^k \operatorname{sgn}(U_n(x)) \, dx.$$

- b) Supposons $n+k$ impair. Déterminer I_k en étudiant la parité de la fonction sous le signe intégral.
- c) Supposons $n+k$ pair. Prouver que

$$I_k = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j^{k+1}.$$

La démonstration d'origine de l'annulation de cette somme utilise les nombres complexes, qui ne figurent plus au programme. On admet ici que la somme est nulle ; ainsi $I_k = 0$. En déduire que $2^{-n}U_n$ vérifie l'hypothèse ().*