

HEC Paris – ESSEC Business School

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2000

Table des matières

1	Préliminaires	2
	<i>Thèmes abordés : suites.</i>	2
2	Étude d'un exemple	2
	<i>Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.</i>	2
3	Sommets et maximum	4
	<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire.</i>	4
4	Existence du maximum de la fonction f	5
	<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire.</i>	5

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Ce problème a pour objet l'étude des points en lesquels une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ atteint son maximum sur l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires. Pour tout entier p strictement positif, on identifiera $\mathbb{R}^p$ et $M_{p,1}(\mathbb{R})$.

1 Préliminaires

Thèmes abordés : suites.

On dit qu'une partie non vide K de $\mathbb{R}$ est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in K, \quad x \leq M.$$

Un réel M vérifiant ces inégalités s'appelle un majorant de K ; on dit aussi que M majore K . Dans ce qui suit, K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soient M un majorant de K et $a \in K$. On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = a, \quad v_0 = M,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{u_n + v_n}{2}, v_n \right) & \text{si } \frac{u_n + v_n}{2} \text{ ne majore pas } K, \\ \left(u_n, \frac{u_n + v_n}{2} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $K = [0, 1[\cup [3, 4]$, $a = 0$ et $M = 10$. Déterminer (u_n, v_n) pour tout entier $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. On revient désormais au cas général.
 - a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.
 - b) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un réel b .
 - c) Montrer que, pour tout entier positif n , v_n est un majorant de K , puis que b majore K .
 - d) Montrer qu'il existe une suite d'éléments de K qui converge vers b .
 - e) On suppose que b' est un majorant de K .
 - Montrer que $b' \geq b$.
 - En déduire que b ne dépend pas des choix initiaux de a et M , pourvu que $a \in K$ et que M majore K .

Désormais, on notera α_K le majorant b ainsi obtenu.

2 Étude d'un exemple

Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne, définie par $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. On considère trois nombres réels a, b, c , tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. On définit les trois ensembles

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}, \\ \mathcal{R}_+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c > 0\}, \\ \mathcal{R}_- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c < 0\}.\end{aligned}$$

- a) Montrer que $\mathcal{R}_+$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

On pourra montrer, en utilisant la continuité de $(x, y) \mapsto ax + by + c$ en un point (x_0, y_0) de $\mathcal{R}_+$, qu'il existe une boule ouverte centrée en (x_0, y_0) et incluse dans $\mathcal{R}_+$. Il s'ensuit, *mutatis mutandis*, que $\mathcal{R}_-$ est également une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, ce que l'on admettra.

- b) Soient (x, y) et (x', y') deux éléments de $\mathcal{R}_+$. Montrer que, pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$, le couple $(\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda y + (1 - \lambda)y')$ appartient à $\mathcal{R}_+$.
- c) On suppose que (x, y) et (x', y') appartiennent respectivement à $\mathcal{R}_+$ et $\mathcal{R}_-$. En considérant la fonction

$$\lambda \mapsto a(\lambda x + (1 - \lambda)x') + b(\lambda y + (1 - \lambda)y') + c,$$

montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $(\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda y + (1 - \lambda)y')$ appartienne à $\mathcal{D}$.

2. Soit k un entier strictement positif. On considère des parties non vides et ouvertes de $\mathbb{R}^2$, notées $A_1, \dots, A_k$.

- a) On suppose dans cette sous-question que $A_1 \cap \dots \cap A_k$ est non vide. Montrer que $A_1 \cap \dots \cap A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Si (x_0, y_0) est un élément de $A_1 \cap \dots \cap A_k$, on montrera qu'il existe un réel r strictement positif tel que la boule de centre (x_0, y_0) et de rayon r soit incluse dans $A_1 \cap \dots \cap A_k$.

- b) Montrer que $A_1 \cup \dots \cup A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

3. On note

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 - 2x + y \geq 0 \text{ et } 1 + x - 2y \geq 0\}$$

et g l'application définie sur Δ par $\forall (x, y) \in \Delta, g(x, y) = 3x - y + 4$.

- a) Représenter graphiquement Δ dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- b) Montrer que Δ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.
- c) Montrer que g admet un maximum sur Δ .
- d) Ce maximum peut-il être atteint en un point de l'ensemble

$$\Delta' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, 1 - 2x + y > 0 \text{ et } 1 + x - 2y > 0\}?$$

- e) Déterminer l'ensemble des points de Δ où ce maximum est atteint.

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note C l'ensemble des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ tels que $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ et $AX = B$.

- a) Montrer que $X \in C$ si et seulement si x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont

$$x_3 = 1 - 2x_1 + x_2, \quad x_4 = 1 + x_1 - 2x_2, \quad (x_1, x_2) \in \Delta.$$

- b) On considère $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique : $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$. On considère la fonction f définie sur C par $\forall X \in C, f(X) = \langle X, W \rangle$.
- Montrer que $f(X) = g(x_1, x_2)$ pour tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ de C .
 - Déterminer l'ensemble des points en lesquels f atteint son maximum sur C .

3 Sommets et maximum

Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire.

Désormais, n et p désignent des entiers strictement positifs. On considère une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et deux matrices colonnes $B \in \mathbb{R}^n$ et $W \in \mathbb{R}^p$. Pour $X \in \mathbb{R}^p$ et $i \in \{1, \dots, p\}$, on note X_i la i -ième composante de X . On dira que X est positif, et l'on écrira $X \geq 0$, lorsque toutes ses composantes sont positives. On munit $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire canonique : $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$.

On considère l'ensemble $C = \{X \in \mathbb{R}^p \mid X \geq 0 \text{ et } AX = B\}$ et la fonction f définie sur C par $\forall X \in C, f(X) = \langle X, W \rangle$. Un élément Z de C est un *sommet* de C lorsque

$$\forall (Z', Z'') \in C^2, \forall \lambda \in]0, 1[, \quad Z = \lambda Z' + (1 - \lambda)Z'' \implies Z' = Z''.$$

Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, on note $s(X) = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid X_i \neq 0\}$, appelé le support de X .

Enfin, $C^1, C^2, \dots, C^p$ désignent les colonnes de A . Ces notations seront utilisées jusqu'à la fin du problème.

1. Vérifier que si l'élément nul de $\mathbb{R}^p$ appartient à C , alors il est un sommet de C .
2. On revient au cas général et l'on suppose dans ce qui suit que C est non vide et que f atteint son maximum sur C en U . Ce maximum est noté M_0 . Le but est de construire un sommet de C en lequel f atteint son maximum. On suppose donc que U n'est pas un sommet de C et l'on considère deux éléments distincts U', U'' de C et un réel $\lambda \in]0, 1[$ tels que $U = \lambda U' + (1 - \lambda)U''$.
 - a) Vérifier que $f(U') = f(U'') = f(U)$ et en déduire que le vecteur $V = U'' - U'$ est orthogonal à W .
Le vecteur $U'' - U'$ étant non nul, il a au moins une composante non nulle et, quitte à échanger U' et U'' , on peut supposer que $V = U'' - U'$ admet une composante strictement négative. C'est ce que l'on suppose désormais.
 - b) — Montrer que $s(U') \subset s(U)$, $s(U'') \subset s(U)$ et $s(V) \subset s(U)$.
— Pour tout réel μ , calculer $A(U + \mu V)$.
— Montrer que $s(U + \mu V) \subset s(U)$ pour tout réel μ .
 - c) Montrer que la famille $(C^i)_{i \in s(U)}$ est liée. On pourra considérer AV .
 - d) On considère $K = \{\mu \in \mathbb{R} \mid U + \mu V \in C\}$.

- Montrer que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
- Montrer que $U + \alpha_K V$ appartient à C et que $f(U + \alpha_K V) = M_0$. Le nombre α_K a été défini dans la partie 1.
- e) On suppose que, pour tout $i \in s(U)$, la i -ième composante Y_i de la colonne $Y = U + \alpha_K V$ est non nulle. En remarquant que, pour tout $i \in s(U)$,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} (U_i + (\alpha_K + \mu)V_i) = U_i + \alpha_K V_i,$$

justifier l'existence d'un réel η , strictement positif, tel que $U + (\alpha_K + \eta)V$ appartienne à C . En déduire que $s(U + \alpha_K V)$ est strictement inclus dans $s(U)$.

- f) On note désormais $U^{(1)} = U + \alpha_K V$ et l'on suppose que $U^{(1)}$ n'est pas un sommet de C . En se servant des questions précédentes, montrer que l'on peut construire un élément $U^{(2)}$ de C tel que $f(U^{(2)}) = M_0$ et tel que $s(U^{(2)})$ soit strictement inclus dans $s(U^{(1)})$.
- g) Dédurre de ce qui précède l'existence d'un sommet de C en lequel f atteint son maximum sur C .

4 Existence du maximum de la fonction f

Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire.

Dans cette partie, on reprend les notations de la partie précédente et l'on note $\langle X, X' \rangle$ aussi bien le produit scalaire canonique de deux vecteurs X, X' de $\mathbb{R}^p$ que celui de deux vecteurs X, X' de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A' \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, \quad \langle AX, Y \rangle = \langle X, A'Y \rangle.$$

2. On note r le rang de la matrice A . On suppose d'une part que r est non nul, et d'autre part que la famille $(C^1, C^2, \dots, C^r)$ est libre. On note E l'espace vectoriel engendré par les colonnes $C^1, C^2, \dots, C^p$ de A .

- a) Montrer que l'application

$$\theta : Y \mapsto \begin{pmatrix} \langle Y, C^1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Y, C^r \rangle \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^r$.

- b) Montrer qu'il existe un unique vecteur colonne $Z \in E$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\langle Z, C^i \rangle = W_i$, où W_i est la i -ième composante du vecteur W introduit dans le préambule de la partie 3.
- c) Exprimer les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ du vecteur colonne $A'Z$, à l'aide des produits scalaires $\langle Z, C^i \rangle$, pour $i = 1, \dots, p$.
- d) Dans cette sous-question, on suppose en outre que $\forall i \in \{r+1, \dots, p\}$, $\langle Z, C^i \rangle \geq W_i$.
 - Soit $X \in C$, montrer que $\langle Z, B \rangle \geq \langle X, W \rangle$.
 - On suppose qu'il existe un vecteur $U \in C$ tel que $s(U) = \{1, \dots, r\}$. Prouver que la fonction $f : X \mapsto \langle X, W \rangle$ atteint son maximum sur C en U et que U est un sommet de C .

3. Dans cette question, A et W sont respectivement la matrice et le vecteur introduits dans la partie 2.
- a) Déterminer la valeur de r .
 - b) Déterminer le vecteur Z .
 - c) Est-ce que $A'Z - W \geq 0$?
 - d) Retrouve-t-on les résultats de la partie 2 ?