
ESSEC

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2001

Table des matières

1	Étude d'intégrales et limite de la suite	2
	<i>Thèmes abordés : suites ; intégrales.</i>	2
2	Accélération par sommation télescopique	3
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; séries ; Python.</i>	3
3	Accélération par les polynômes de Bernoulli	4
	<i>Thèmes abordés : suites ; fonctions d'une variable ; intégrales.</i>	4

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

On étudie dans ce problème la suite (S_n) définie, pour $n \geq 1$, par

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}.$$

Dans la première partie, on détermine la limite S de la suite (S_n) . Dans les deux parties suivantes, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de (S_n) vers S .

1 Étude d'intégrales et limite de la suite

Thèmes abordés : suites ; intégrales.

Pour tout entier $p \geq 0$, on considère les deux intégrales

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t) dt, \quad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t) dt.$$

1. Convergence de la suite $\left(\frac{J_p}{I_p}\right)$.

- a) Établir l'inégalité suivante pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$:

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t).$$

- b) Établir l'inégalité suivante pour tout entier $p \geq 0$:

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1}).$$

- c) Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p en intégrant par parties l'intégrale I_{p+1} .

Indication : on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$ dans l'intégration par parties.

- d) Dédire des résultats précédents que $\frac{J_p}{I_p}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

2. Convergence et limite de la suite (S_n) .

- a) Exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_p ($p \geq 1$).

- b) En déduire la relation suivante pour $p \geq 1$:

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.$$

- c) Calculer J_0 et I_0 , puis déterminer la limite S de la suite (S_n) .

2 Accélération par sommation télescopique

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; séries ; Python.

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling.

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$. Pour tout entier naturel k , on note f_k la fonction de E définie par

$$f_0(x) = \frac{1}{x}, \quad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} \quad (k \geq 1).$$

Enfin, Δ désigne l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie, pour $x > 0$, par

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

1. Sommation de séries télescopiques.

- Établir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .
- Établir, pour toute fonction f appartenant à E , la convergence de la série $\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p)$ et calculer, pour tout entier naturel n , les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) \quad \text{et} \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p).$$

- Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geq 1$.
- Établir, pour tout entier naturel $k \geq 1$, la convergence de la série $\sum_{p=1}^{+\infty} f_k(p)$ et vérifier, pour tout entier naturel n , que

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}.$$

2. Accélération de la convergence de (S_n) .

- Établir la relation suivante pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{p} f_k(p) = f_q(p).$$

- En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}.$$

- En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S'_n) de nombres rationnels telle que

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}.$$

Expliciter S'_n et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

- Écrire en Python une fonction qui, pour une valeur de n donnée, calcule et affiche S'_n dans le cas $q = 2$.

3 Accélération par les polynômes de Bernoulli

Thèmes abordés : suites ; fonctions d'une variable ; intégrales.

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S en effectuant un développement limité de S_n suivant les puissances de $\frac{1}{n}$.

1. Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels (u_n) telle que $u_0 = 1$ et

$$\sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} = 0$$

pour tout entier $n \geq 2$. Établir que les u_n sont rationnels et donner u_1, u_2, u_3, u_4 sous forme de fractions irréductibles.

2. **Étude des polynômes de Bernoulli.**

- a) On considère la suite de polynômes (U_n) définie par

$$U_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad U_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p} x^p}{p!} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

Préciser U_1, U_2, U_3, U_4 . Montrer que $U'_n = U_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $U_n(0) = U_n(1)$ pour $n \geq 2$.

- b) On considère une suite de polynômes (V_n) définie par

$$V_0 = 1, \quad V'_n = V_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad V_n(0) = V_n(1) \quad (n \geq 2).$$

Établir que $V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0)$ pour $0 \leq p \leq n$ et en déduire la formule

$$V_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0) x^p}{p!}.$$

Établir la formule suivante, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

Établir enfin que $V_n = U_n$ pour tout entier naturel n .

- c) En déduire l'égalité $U_n(x) = (-1)^n U_n(1-x)$ pour tout entier naturel n . Montrer alors que $u_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$.

3. **Accélération de la convergence de (S_n) .**

- a) Établir, pour $p \geq 1$, la relation suivante, d'abord en supposant $q = 1$, puis $q \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) \\ & + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right) = (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}} dx. \end{aligned}$$

- b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}} \leq \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}},$$

où M_{2q+1} désigne le maximum de la fonction continue $x \mapsto |U_{2q+1}(x)|$ sur le segment $[0, 1]$.

- c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S_n'') de nombres rationnels telle que

$$\frac{\pi^2}{6} - S_n'' \leq \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

Expliciter S_n'' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

- d) Écrire en Python une fonction qui, pour une valeur de n donnée, calcule et affiche S_n'' dans le cas $q = 2$.