

HEC Paris

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2001

Table des matières

1 Étude de la fonction F	2
<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; fonctions de plusieurs variables.</i>	2
2 Étude des lignes de niveau de F	2
<i>Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; fonctions d'une variable.</i>	2
3 Étude du cas discret	3
<i>Thèmes abordés : suites ; Python.</i>	3
4 Étude du cas continu	4
<i>Thèmes abordés : systèmes différentiels ; fonctions d'une variable ; intégrales.</i>	4
5 Le contexte historique du modèle de Vito Volterra	5
<i>Thèmes abordés : systèmes différentiels.</i>	5

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Le but de ce problème est l'étude du modèle démographique « proies et prédateurs » de Vito Volterra.

Dans tout le problème, $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien, α , β , a , b désignent des réels strictement positifs, fixés une fois pour toutes. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions

$$f(x) = -\alpha \ln x + \beta x, \quad g(y) = -a \ln y + by,$$

et la fonction F sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $F(x, y) = f(x) + g(y)$.

1 Étude de la fonction F

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; fonctions de plusieurs variables.

1. Étudier les variations de f et vérifier qu'elle admet un minimum, noté m_f ; définir de même m_g , minimum de g .
2. Noter f_1 et f_2 les restrictions respectives de f à $]0, \alpha/\beta]$ et à $[\alpha/\beta, +\infty[$. Noter g_1 et g_2 les restrictions respectives de g à $]0, a/b]$ et à $[a/b, +\infty[$. Montrer que f_1 définit une bijection de $]0, \alpha/\beta]$ sur un ensemble à préciser. Énoncer des résultats analogues pour f_2 , g_1 et g_2 .
3. Montrer que F possède un minimum et préciser l'ensemble des points où celui-ci est atteint. On notera m_F le minimum de F .

2 Étude des lignes de niveau de F

Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; fonctions d'une variable.

Pour tout réel c , on définit $\Gamma_c = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid F(x, y) = c\}$. On étudie la forme de sa représentation graphique dans un plan muni d'un repère orthonormé.

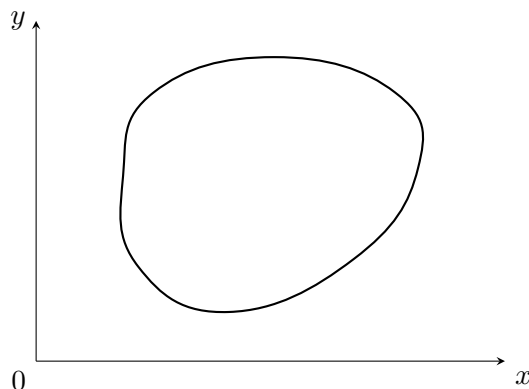
1. Préciser Γ_c lorsque $c < m_F$, puis lorsque $c = m_F$.
2. On suppose désormais $c > m_F$.
 - a) Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs u_c et v_c tels que $u_c < \alpha/\beta < v_c$ et $m_g = c - f(u_c) = c - f(v_c)$.
 - b) Noter K_c l'ensemble des réels strictement positifs x pour lesquels il existe au moins un réel strictement positif y tel que $F(x, y) = c$. Montrer que $K_c = [u_c, v_c]$.
 - c) Montrer que, si $x \in]u_c, v_c[$, il existe deux réels strictement positifs y tels que $F(x, y) = c$ et exprimer ces nombres à l'aide de f , g_1^{-1} et g_2^{-1} . Préciser l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}_+^* \mid F(x, y) = c\}$ lorsque $x = u_c$, puis lorsque $x = v_c$.
 - d) Montrer qu'il existe deux fonctions h_1 et h_2 , définies sur $[u_c, v_c]$, telles que

$$\forall x \in [u_c, v_c], \quad h_1(x) \leq \frac{a}{b} \leq h_2(x),$$

et que

$$\Gamma_c = \{(x, h_1(x)) \mid x \in [u_c, v_c]\} \cup \{(x, h_2(x)) \mid x \in [u_c, v_c]\}.$$

Justifier la représentation suivante de Γ_c . Préciser les positions des tangentes éventuelles aux points d'abscisses u_c , α/β et v_c .



3 Étude du cas discret

Thèmes abordés : suites ; Python.

Soient Δ un réel strictement positif, n un entier strictement positif et $\delta = \Delta/n$. On considère deux suites de réels strictement positifs $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ telles que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\begin{cases} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} = \delta(a - bR_k), \\ \frac{R_{k+1} - R_k}{R_k} = \delta(-\alpha + \beta S_k). \end{cases}$$

On pose $m = \min_{0 \leq k \leq n} S_k$, $M = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$, $\ell = \min_{0 \leq k \leq n} R_k$ et $L = \max_{0 \leq k \leq n} R_k$.

1. Écrire une fonction Python `calcul(S0, R0)` qui renvoie les valeurs S_n et R_n conformément aux relations précédentes, les constantes α , β , a , b , n et Δ étant supposées définies.

```

1 def calcul(S0, R0):
2     S, R = S0, R0
3     delta = Delta / n
4     for k in range(n):
5         S, R = S * (1 + delta * (a - b * R)), R * (1 + delta * (-alpha + beta *
6             S))
7     return S, R

```

2. a) Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, calculer $\beta(S_{k+1} - S_k) + b(R_{k+1} - R_k)$ en fonction de S_k et R_k .
 b) Déterminer, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $\delta a \sum_{k=0}^{p-1} S_k - \delta \alpha b \sum_{k=0}^{p-1} R_k$ en fonction de S_p , S_0 , R_p et R_0 .
 c) Montrer que, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$,

$$\alpha \sum_{k=0}^{p-1} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} + a \sum_{k=0}^{p-1} \frac{R_{k+1} - R_k}{R_k} = \beta(S_p - S_0) + b(R_p - R_0).$$

3. a) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\left| \ln S_{k+1} - \ln S_k - \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \leq \frac{(S_{k+1} - S_k)^2}{2m^2}.$$

b) En déduire que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\left| \ln S_{k+1} - \ln S_k - \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \leq \frac{\Delta^2 M^2 (a + bL)^2}{2m^2 n^2}.$$

c) Montrer que, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left| \ln S_p - \ln S_0 - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \leq \frac{\Delta^2 M^2 (a + bL)^2}{2m^2 n}.$$

4. Poser $c = -\alpha \ln S_0 + \beta S_0 - a \ln R_0 + bR_0$. Déterminer un réel A , s'exprimant à l'aide de α , β , a , b , m , M , ℓ et L , tel que, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$,

$$|-\alpha \ln S_p + \beta S_p - a \ln R_p + bR_p - c| \leq \frac{A}{n}.$$

4 Étude du cas continu

Thèmes abordés : systèmes différentiels ; fonctions d'une variable ; intégrales.

On considère deux fonctions S et R , définies sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'elles vérifient, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{cases} \frac{S'(t)}{S(t)} = a - bR(t), \\ \frac{R'(t)}{R(t)} = -\alpha + \beta S(t). \end{cases} \quad (\mathcal{E})$$

1. a) Montrer qu'il existe un réel c tel que, pour tout réel positif t , le point de coordonnées $(S(t), R(t))$ appartienne à Γ_c .
 b) En déduire que les fonctions S et R sont bornées.
 c) Que peut-on dire des fonctions S et R si $c = m_F$?
 On suppose désormais, et ce jusqu'à la fin du problème, que $c > m_F$.
2. Soit θ un réel positif. On suppose que S' ne s'annule pas sur $[\theta, +\infty[$.
 a) Montrer que S admet une limite finie en $+\infty$, puis que cette limite est strictement positive.
 b) Montrer qu'il existe un réel λ tel que R' ne s'annule pas sur $[\lambda, +\infty[$. Que peut-on en déduire pour R ?
 c) Montrer que S' admet une limite en $+\infty$, puis que cette limite est nulle en considérant la nature de l'intégrale $\int_{\theta}^{+\infty} S'(t) dt$.
 d) Montrer également que $\lim_{t \rightarrow +\infty} R'(t) = 0$.
 e) En considérant les limites de S et R en $+\infty$, montrer qu'on arrive à une contradiction. En déduire que S' s'annule en une infinité de points.
3. Considérer deux réels positifs distincts τ_1 et τ_2 tels que $S'(\tau_1) = S'(\tau_2) = 0$, avec $\tau_1 < \tau_2$.
 a) Montrer qu'il existe $\theta \in]\tau_1, \tau_2[$ tel que $R'(\theta) = 0$.
 b) En considérant les valeurs de S en θ , τ_1 et τ_2 , montrer qu'il existe un réel μ strictement positif, indépendant de τ_1 et τ_2 , tel que $|S(\theta) - S(\tau_1)| \geq \mu$.

- c) Montrer que S' est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
- d) Montrer qu'il existe un réel η strictement positif, indépendant de τ_1 et τ_2 , tel que $|\tau_2 - \tau_1| > \eta$.
4. a) Montrer qu'on peut trouver trois réels positifs $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ tels que $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ et $S'(\theta_1) = S'(\theta_2) = S'(\theta_3) = 0$.
- b) Montrer que S' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[0, \theta_3]$.
- c) En déduire qu'il existe trois réels positifs t_1, t_2, t_3 tels que $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$ et

$$\forall t \in [t_1, t_3], \quad S'(t) = 0 \iff t \in \{t_1, t_2, t_3\}.$$

5. Montrer que S' est de signe constant sur $]t_1, t_2[$ et sur $]t_2, t_3[$, et que les signes respectifs de S' sur ces deux intervalles sont opposés. On pourra considérer les valeurs de R en t_1, t_2, t_3 . Dans la suite, on suppose que S' est positif sur $]t_1, t_2[$ et négatif sur $]t_2, t_3[$.
6. a) Montrer que $S(t_1) = S(t_3) = u_c$ et $S(t_2) = v_c$.
- b) Déterminer les valeurs de $R(t_1)$ et $R(t_3)$.
7. a) Sur un même tableau de variation, faire apparaître les variations de S et de R sur $[t_1, t_3]$.
- b) En déduire le sens de déplacement du point M_t de coordonnées $(S(t), R(t))$ sur la représentation graphique de Γ_c lorsque t décrit $[t_1, t_3]$.
8. On admet que si (S_1, R_1) et (S_2, R_2) sont deux couples de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $(\mathcal{E})$, et s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $S_1(t_0) = S_2(t_0)$ et $R_1(t_0) = R_2(t_0)$, alors $S_1(t) = S_2(t)$ et $R_1(t) = R_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que S et R sont périodiques, de période $T = t_3 - t_1$.
9. Soit u un réel positif.
- a) Calculer $\int_u^{u+T} \frac{S'(t)}{S(t)} dt$.
- b) En déduire la valeur moyenne de R sur $[u, u+T]$, c'est-à-dire $\frac{1}{T} \int_u^{u+T} R(t) dt$. Déterminer de même la valeur moyenne de S sur ce segment.
10. Considérer deux fonctions K et H , définies sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, ainsi qu'un réel $\varepsilon \in]0, \alpha[$. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{cases} \frac{K'(t)}{K(t)} = a - \varepsilon - bH(t), \\ \frac{H'(t)}{H(t)} = -\alpha - \varepsilon + \beta K(t). \end{cases} \quad (\mathcal{E}')$$

Montrer qu'il existe un réel Θ strictement positif tel que les fonctions K et H sont périodiques de période Θ , et déterminer la valeur moyenne de ces fonctions sur un segment de longueur égale à Θ .

5 Le contexte historique du modèle de Vito Volterra

Thèmes abordés : systèmes différentiels.

Les calculs précédents donnent une représentation de l'évolution d'une population de deux types : les proies et les prédateurs. Les prédateurs se nourrissent uniquement de proies ; les

proies disposent d'une autre nourriture abondante. En l'absence de prédateurs, les proies se développeraient de façon exponentielle, mais cette croissance est réduite par la présence des prédateurs. En revanche, le nombre de prédateurs décroîtrait de manière exponentielle en l'absence de proies ; cette décroissance est compensée par la présence des proies.

Supposer que cette population est une population de poissons constituée de proies et de prédateurs, d'effectifs relatifs $K(t)$ et $H(t)$ à l'instant t ; les fonctions K et H vérifient les relations $(\mathcal{E}')$ de la partie IV. La constante ε représente un taux de pêche identique pour les proies et les prédateurs.

Au cours de la Première Guerre mondiale, une diminution de la pêche dans l'Adriatique s'est révélée défavorable aux proies. Montrer que les calculs de la question IV.10 expliquent directement le phénomène observé.