
ESSEC

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2002

Table des matières

1	Partie I – Polynômes et racines	2
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; intégrales généralisées ; algèbre bilinéaire.</i>	2
2	Partie II – Extrema d’une fonction	3
	<i>Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables.</i>	3

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Dans la suite, on désigne par n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit *unitaire* lorsque son coefficient dominant, c'est-à-dire le coefficient de son terme de plus haut degré, est égal à 1.

L'objet du problème est l'étude des extrema d'une fonction de plusieurs variables (partie II). À cet effet, on étudie auparavant, dans la partie I, une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et leurs racines. Les deux parties ne sont pas indépendantes, mais on pourra admettre des résultats de la partie I pour pouvoir traiter la partie II.

1 Partie I – Polynômes et racines

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; intégrales généralisées ; algèbre bilinéaire.

1. Définition d'un endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$

- a) Établir que l'application associant à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ le polynôme

$$\varphi(P) = 2xP' - P'',$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P , est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- b) Écrire sa matrice dans la base canonique $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Éléments propres de l'endomorphisme

- a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ de φ (on supposera que $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$) et montrer que φ est diagonalisable.
- b) Montrer, pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, qu'il existe un et un seul polynôme unitaire H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$H_p'' - 2xH_p' + 2pH_p = 0.$$

- c) Montrer, pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, que H_p est nécessairement de degré p .
- d) Expliciter les polynômes H_0, H_1, H_2, H_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer les coefficients de x^{p-1} ($1 \leq p \leq n$) et de x^{p-2} ($2 \leq p \leq n$) dans l'expression du polynôme H_p .

3. Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

- a) Montrer que l'intégrale écrite ci-dessous est définie pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x) \exp(-x^2) dx.$$

- b) Montrer alors que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \mapsto \langle P, Q \rangle \in \mathbb{R}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- c) Exprimer la dérivée de $x \mapsto P'(x) \exp(-x^2)$ en fonction de $\varphi(P)(x) \exp(-x^2)$, puis prouver que l'on a, pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle.$$

- d) En déduire que $\langle H_p, H_q \rangle = 0$ lorsque p et q sont deux entiers distincts compris entre 0 et n , puis que $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ forme une base orthogonale pour ce produit scalaire. Montrer enfin que $\langle H_p, Q \rangle = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ ($1 \leq p \leq n$).

4. Étude des racines des polynômes H_p ($1 \leq p \leq n$)

- a) Montrer, en remarquant que $\langle H_p, H_0 \rangle = 0$, que le polynôme H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe.
- b) On note $a_1, a_2, \dots, a_m$ les racines distinctes de H_p en lesquelles celui-ci s'annule et change de signe (avec bien entendu $m \leq p$) et on pose alors

$$P_m(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_m).$$

Étudier le signe du polynôme $H_p P_m$ et déterminer la valeur de l'intégrale $\langle H_p, P_m \rangle$ si $m < p$, puis en déduire que $m = p$.

- c) En déduire que le polynôme H_p admet p racines simples dans $\mathbb{R}$.

5. Relations entre les polynômes H_p ($2 \leq p \leq n$)

- a) Prouver les égalités suivantes pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-3}[X]$, où $3 \leq p \leq n$:

$$\langle xH_{p-1}, Q \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle H_p - xH_{p-1}, Q \rangle = 0.$$

En exprimant le polynôme $H_p - xH_{p-1}$ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$, établir la relation

$$2H_p - 2xH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0 \quad (2 \leq p \leq n).$$

- b) Prouver l'égalité $\langle H'_p, Q \rangle = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-2}[X]$, où $2 \leq p \leq n$, puis en déduire la relation

$$H'_p = pH_{p-1} \quad (1 \leq p \leq n).$$

2 Partie II – Extrema d'une fonction

Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables.

On considère dans cette partie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ constitué des n -uplets $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ constitué des n -uplets $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (mais on ne demande pas de vérifier que cette partie U de $\mathbb{R}^n$ est ouverte).

On étudie ici les extrema de la fonction de plusieurs variables F définie sur l'ouvert U par

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(x_j - x_i).$$

Par exemple, pour $n = 3$, on obtient

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 \ln(x_2 - x_1) - 2 \ln(x_3 - x_2) - 2 \ln(x_3 - x_1).$$

1. Étude du cas particulier $n = 2$ ($F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \ln(x_2 - x_1)$)

- a) Calculer les deux dérivées partielles de F en tout point $x = (x_1, x_2)$ de U et déterminer l'unique point a de U où ces dérivées partielles sont nulles.
- b) Calculer $F(a)$ et montrer que F présente un minimum local en a .

2. Étude du point critique de F dans le cas général

On associe à tout point a de U le polynôme $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$. On rappelle qu'un point a de U est dit point critique de F si les dérivées partielles de F sont nulles en a .

- a) Établir la relation suivante pour tout nombre réel x distinct de $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - a_j}.$$

En déduire la limite, lorsque x tend vers a_i , de $\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i}$.

- b) Déterminer, à l'aide de la formule de Taylor-Young (dont on demande de rappeler ici l'énoncé), le développement limité à l'ordre 2 à l'origine des deux fonctions suivantes :

$$f(t) = tP'(a_i + t) - P(a_i + t) \quad \text{et} \quad g(t) = tP(a_i + t).$$

En déduire la limite, lorsque x tend vers a_i , de $\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i}$ (on posera $x = a_i + t$).

- c) Utiliser les résultats précédents pour établir l'égalité

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}.$$

Exprimer les n dérivées partielles de F en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$, puis démontrer que si a est point critique de F , alors $2xP' - P''$ admet pour racines $a_1, a_2, \dots, a_n$.

- d) En déduire qu'il existe un nombre réel λ (dont on précisera la valeur) tel que $2xP' - P'' = \lambda P$, puis comparer les polynômes P et H_n . Établir que F admet un unique point critique a dans U .

3. Nature du point critique de F dans le cas général

- a) Montrer que, si x, y appartiennent à U , alors $tx + (1 - t)y$ appartient aussi à U si $0 \leq t \leq 1$.
- b) On dit qu'une fonction f définie sur l'ouvert U est convexe si

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], \quad f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que $x \mapsto x_i^2$ est convexe sur U .

Montrer que la fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto -\ln(x) \in \mathbb{R}$ est convexe sur $]0, +\infty[$. En déduire que $x \mapsto -\ln(x_j - x_i)$ est convexe sur U .

Établir que F est convexe sur U .

- c) On désigne par a le point critique de F et par x un élément de U et on pose, pour $0 \leq t \leq 1$,

$$\phi(t) = F(tx + (1 - t)a).$$

Calculer la dérivée $\phi'(t)$ et montrer que $\phi'(0) = 0$. Établir l'inégalité ci-dessous pour $0 < t \leq 1$, puis conclure que F admet un minimum en a :

$$\frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} \leq F(x) - F(a).$$

4. Calcul du minimum $F(a)$ de F dans le cas général

- a) On désigne par $y_1, \dots, y_{n-1}$ les racines de H_{n-1} , et par $z_1, \dots, z_{n-2}$ les racines de H_{n-2} ($n \geq 3$). Établir, à l'aide de la relation

$$2H_n - 2xH_{n-1} + (n-1)H_{n-2} = 0,$$

les relations

$$\prod_{i=1}^{n-1} |H_n(y_i)| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} |H_{n-1}(z_i)|,$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} |H_n(y_i)| = \frac{2^{2+3+\dots+(n-1)} n^{n-1}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Établir que

$$|H'_n(a_i)| = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_j - a_i| \quad \text{et évaluer} \quad p_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

en fonction de $\prod_{i=1}^n H'_n(a_i)$.

Établir, à l'aide de la relation $H'_n = nH_{n-1}$, l'égalité

$$p_n^2 = n^n \prod_{i=1}^{n-1} |H_n(y_i)|.$$

En déduire p_n en fonction de n .

- b) En remarquant que le polynôme H_n vérifie l'égalité suivante :

$$H_n(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

$$= x^n - \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x^{n-1} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n.$$

calculer les sommes $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$, $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$, puis $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i^2$. En déduire la valeur $F(a)$ du minimum de F sur U et retrouver, lorsque $n = 2$, le résultat de la question II.1.