

HEC Paris

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2002

Table des matières

1	Le plus petit des plus grands et le plus grand des plus petits	2
	<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; Python.</i>	2
2	Le minimum des maxima et le maximum des minima	2
	<i>Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; applications linéaires.</i>	2
3	Point-selle et point critique	4
	<i>Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; applications linéaires.</i>	4
4	Application à une étude de la concurrence	5
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; fonctions de plusieurs variables.</i>	5

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Notations. Dans tout le problème, n et p désignent des entiers naturels non nuls fixés. On pose $E_n = M_{n,1}(\mathbb{R})$ et, de même, $E_p = M_{p,1}(\mathbb{R})$. On note

$$K_n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_n : x_1, \dots, x_n \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

et l'on définit de même K_p . Les espaces E_n et E_p sont munis de leur structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne est notée $\|\cdot\|$ et le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les notations $\max$ et $\min$ ont leur sens usuel, pour une famille finie de réels comme pour une fonction admettant un extremum.

1 Le plus petit des plus grands et le plus grand des plus petits

Thèmes abordés : applications linéaires ; Python.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On pose

$$u(A) = \min_{1 \leq i \leq n} \left(\max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j} \right), \quad v(A) = \max_{1 \leq j \leq p} \left(\min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j} \right).$$

1. Calculer $u(A)$ et $v(A)$ dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On revient au cas général. Pour tout $j_0 \in \{1, \dots, p\}$ et tout $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, on pose $s_{j_0} = \min_i a_{i,j_0}$ et $t_{i_0} = \max_j a_{i_0,j}$.
 - a) Montrer que $s_{j_0} \leq t_{i_0}$ pour tout j_0 et tout i_0 .
 - b) En déduire que $v(A) \leq u(A)$.
3. On suppose que les entiers n et p sont fixés. Écrire une fonction Python `max_ligne(A, i)` qui renvoie le plus grand élément de la ligne d'indice `i` de la matrice `A`, puis une fonction Python `min_max(A)` renvoyant la valeur $u(A)$. La seconde fonction pourra utiliser la première.

2 Le minimum des maxima et le maximum des minima

Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; applications linéaires.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$ et $h(x, y) = {}^t X A Y$.
 - a) Calculer $h(x, y)$ en fonction de x et y .

- b) Déterminer, suivant $x \in [0, 1]$, le maximum sur $[0, 1]$ de la fonction $y \mapsto h(x, y)$; on le notera $\lambda(x)$.
- c) Déterminer la valeur minimale de $\lambda(x)$ lorsque x décrit $[0, 1]$. Cette valeur, notée $\alpha(A)$, est égale à $\min_{X \in K_2} \max_{Y \in K_2} {}^t XAY$.
- d) Par une méthode analogue, montrer l'existence de $\beta(A) = \max_{Y \in K_2} \min_{X \in K_2} {}^t XAY$ et donner sa valeur.

Dans la suite, $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et f est définie sur $K_n \times K_p$ par $f(X, Y) = {}^t XAY$. Pour $j \in \{1, \dots, p\}$ et $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in K_n$, on pose $\varphi_j(X) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}x_i$, puis $\lambda(X) = \max_{1 \leq j \leq p} \varphi_j(X)$.

2. Soient $g_1, \dots, g_p$ des fonctions continues sur K_n à valeurs réelles.
- a) Poser $h = \max(g_1, g_2)$ et vérifier que $h = \frac{g_1 + g_2 + |g_1 - g_2|}{2}$. En déduire que h est continue sur K_n .
- b) Montrer que $g = \max(g_1, \dots, g_p)$ est continue sur K_n .
3. Soit $X \in K_n$.
- a) Montrer que, pour tout $Y \in K_p$, $f(X, Y) \leq \lambda(X)$.
- b) Montrer qu'il existe $Y_X \in K_p$ tel que $f(X, Y_X) = \lambda(X)$.
- c) En déduire que $\lambda(X) = \max_{Y \in K_p} f(X, Y)$.
4. a) Montrer que K_n est borné. On admet pour la suite que K_n est fermé dans E_n .
- b) Montrer que λ admet un minimum sur K_n . Ce minimum est noté $\alpha(A)$. On admet de même l'existence de $\beta(A)$, avec

$$\alpha(A) = \min_{X \in K_n} \max_{Y \in K_p} {}^t XAY, \quad \beta(A) = \max_{Y \in K_p} \min_{X \in K_n} {}^t XAY.$$

5. a) Soit $(X', Y) \in K_n \times K_p$. Montrer que $\min_{X \in K_n} f(X, Y) \leq \lambda(X')$.
- b) En déduire que $\beta(A) \leq \alpha(A)$.
6. Une partie non vide C de E_p est dite convexe lorsque, pour tous $X, Y \in C$ et tout $m \in [0, 1]$, $mY + (1 - m)X \in C$. On considère une partie C de E_p , convexe, fermée, bornée et non vide.
- a) Montrer qu'il existe $W \in C$ tel que $\|W\| \leq \|Y\|$ pour tout $Y \in C$.
- b) Pour $Y \in C$ et $m \in [0, 1]$, poser $Y_m = (1 - m)W + mY$. Montrer que, pour tout $m \in]0, 1[$,

$$\langle W, Y \rangle \geq \frac{2 - m}{2(1 - m)} \|W\|^2 - \frac{m}{2(1 - m)} \|Y\|^2,$$

puis en déduire que $\langle W, Y \rangle \geq \|W\|^2$.

7. Dans cette question et jusqu'à la fin de cette partie, on considère

$$C = \{m {}^t AX + (1 - m)Y : X \in K_n, Y \in K_p, m \in [0, 1]\}.$$

- a) Montrer que K_n est une partie convexe de E_n .
- b) Montrer que C est une partie convexe et bornée de E_p . On admet pour la suite que C est fermée dans E_p .

8. On suppose que le vecteur nul appartient à C .
- Montrer qu'il existe $X_0 \in K_n$, $Y_0 \in K_p$ et un réel $\mu \leq 0$ tels que ${}^tAX_0 = \mu Y_0$.
 - Déterminer le signe de ${}^tX_0AY$ pour tout $Y \in K_p$.
 - Déterminer le signe de $\alpha(A)$.
9. On suppose que le vecteur nul n'appartient pas à C .
- Montrer qu'il existe $W \in C$ tel que, pour tout $m \in [0, 1]$, tout $X \in K_n$ et tout $Y \in K_p$, ${}^tXAW + (1 - m){}^tYW > 0$.
 - En notant $w_1, \dots, w_p$ les coordonnées de W dans la base canonique de E_p , montrer que $w_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.
 - Montrer que ${}^tXAW > 0$ pour tout $X \in K_n$.
 - Montrer qu'il existe $W' \in K_p$ tel que ${}^tXAW' > 0$ pour tout $X \in K_n$.
 - Montrer que $\beta(A) > 0$.
10. On définit $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ par $B = A - \beta(A)J$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1.
- Déterminer $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ en fonction de $\alpha(A)$ et de $\beta(A)$.
 - Déduire des questions précédentes que $\alpha(A) = \beta(A)$.

3 Point-selle et point critique

Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; applications linéaires.

Dans cette partie, $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $f(X, Y) = {}^tXAY$ pour tout $(X, Y) \in K_n \times K_p$. Un couple $(X_0, Y_0) \in K_n \times K_p$ est un *point-selle* pour f lorsque, pour tout $(X, Y) \in K_n \times K_p$,

$$f(X_0, Y) \leq f(X_0, Y_0) \leq f(X, Y_0).$$

- Montrer qu'il existe un point-selle pour f et que, si (X_0, Y_0) en est un, alors $f(X_0, Y_0) = \alpha(A)$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}.$$

Un point critique de g est un couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{\partial g}{\partial x}(u, v) = \frac{\partial g}{\partial y}(u, v) = 0$.

- Montrer que g admet un unique point critique (x_0, y_0) si et seulement si $a + d - b - c \neq 0$.
Le déterminer dans ce cas.
- On suppose que $a - b$ et $d - c$ sont de même signe et non tous nuls, et que $a - c$ et $d - b$ sont de même signe et non tous nuls.
 - Montrer que g admet un unique point critique (x_0, y_0) et que $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$.
 - Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = g(x_0, y_0) + (x - x_0)(y - y_0)(a + d - b - c)$.
 - En déduire que $\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 - x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 - y_0 \end{pmatrix} \right)$ est un point-selle pour l'application f sur $K_2 \times K_2$.
 - Quelle est la valeur de $\alpha(A)$?

4 Application à une étude de la concurrence

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; fonctions de plusieurs variables.

Deux entrepreneurs, Primus et Secundus, se partagent le marché d'un produit sur un territoire commun. À chaque trimestre, si la part de marché de l'un varie de Δ unités, celle de l'autre varie de $-\Delta$ unités. Cette variation dépend des stratégies choisies par chacun.

Primus choisit entre les stratégies P_1 et P_2 ; Secundus choisit entre S_1 et S_2 . Le tableau donne les variations trimestrielles de la part de marché de Secundus :

	Secundus choisit S_1	Secundus choisit S_2
Primus choisit P_1	-2	3
Primus choisit P_2	1	-1

Les deux entrepreneurs choisissent simultanément et aléatoirement l'une de leurs deux stratégies : Primus choisit P_1 avec la probabilité $x \in [0, 1]$ et P_2 avec la probabilité $1 - x$; indépendamment, Secundus choisit S_1 avec la probabilité $y \in [0, 1]$ et S_2 avec la probabilité $1 - y$. On note $V_{x,y}$ la variable aléatoire égale à la variation trimestrielle de la part de marché de Secundus.

1. Déterminer l'espérance de $V_{x,y}$.
2. Établir qu'il existe des probabilités x_0 et y_0 telles que Primus, respectivement Secundus, ne trouve aucun avantage à choisir $x \neq x_0$, respectivement $y \neq y_0$, lorsque Secundus, respectivement Primus, s'en tient à y_0 , respectivement x_0 . Déterminer x_0 et y_0 .