

ESSEC

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2003

Table des matières

1	Partie I – Généralités	2
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales ; espaces vectoriels ; réduction. . .</i>	<i>2</i>
2	Partie II – Existence d'une fonction non constante dans $E_1(\varphi)$	3
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales.</i>	<i>3</i>
3	Partie III – Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\varphi)$	4
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales.</i>	<i>4</i>
4	Partie IV – Recherche des fonctions bornées de $E_1(\varphi)$	5
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales.</i>	<i>5</i>

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$.

À toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on associe la fonction $\varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt.$$

On définit ainsi un endomorphisme φ de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, dont on étudie dans la suite certaines propriétés au travers de parties largement indépendantes.

1 Partie I – Généralités

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales ; espaces vectoriels ; réduction.

1. On étudie quelques propriétés de $\varphi(f)$ en fonction de celles de f .

a) Prouver l'égalité suivante, pour toute fonction continue f et tout réel x :

$$\varphi(f)(x) = \int_0^1 f(x+u-1) du.$$

b) On suppose f paire (respectivement impaire). Exprimer $\varphi(f)(-x)$ en fonction de $\varphi(f)(x+1)$.

c) On suppose f croissante (respectivement décroissante). La fonction $\varphi(f)$ l'est-elle également ?

d) On suppose f convexe (respectivement concave). La fonction $\varphi(f)$ l'est-elle également ?

e) On suppose que f admet une limite L en $+\infty$. La fonction $\varphi(f)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

2. On étudie l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ . On note alors φ_n l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ_n .

3. On étudie l'injectivité et la surjectivité de φ .

a) Montrer, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, que $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa dérivée. Pour quelles valeurs de l'entier j l'espace vectoriel $\varphi(\mathcal{C}^j(\mathbb{R}))$ est-il inclus dans $\mathcal{C}^j(\mathbb{R})$?

b) Montrer que $\ker(\varphi)$ est formé des fonctions 1-périodiques et d'intégrale nulle sur une période.

c) L'endomorphisme φ est-il surjectif ? injectif ?

4. On étudie les éléments propres de φ .

- a) On considère une valeur propre λ de l'endomorphisme φ , c'est-à-dire un réel λ tel qu'il existe une fonction non nulle $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(f) = \lambda f$. Montrer que toute fonction propre f associée à une valeur propre $\lambda \neq 0$ est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Quelles fonctions polynomiales f sont fonctions propres de φ ?
- c) Montrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, il existe une et une seule fonction exponentielle f , définie par $f(x) = e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$, telle que $\varphi(f) = \lambda f$. En déduire que tout réel $\lambda > 0$ est valeur propre de φ .
- d) Montrer que, pour tout réel $\lambda > 1$, la seule fonction bornée f appartenant au sous-espace propre associé à λ est la fonction nulle.

Dans la suite du problème, on étudie le sous-espace propre $E_1(\varphi)$ associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues f vérifiant, pour tout réel x ,

$$\varphi(f)(x) = f(x), \quad \text{ou encore} \quad \int_{x-1}^x f(t) dt = f(x).$$

2 Partie II – Existence d'une fonction non constante dans $E_1(\varphi)$

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales.

1. On considère la fonction f_0 définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par $f_0(0) = f_0(1) = 0$ et, pour $0 < x < 1$, par

$$f_0(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right).$$

- a) Montrer que la courbe représentative de f_0 admet le point $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pour centre de symétrie.
 - b) Montrer que f_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et que $\int_0^1 f_0(t) dt = 0$.
2. On définit alors par récurrence, à partir de f_0 , une suite de fonctions (f_n) définies sur $[0, 1]$ par

$$f_{n+1}(x) = f_n(1) \exp(x) - \exp(x) \int_0^x f_n(t) \exp(-t) dt.$$

- a) Montrer que f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et vérifie $(f_{n+1})' = f_{n+1} - f_n$. En déduire que

$$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt.$$

- b) Montrer que $f_{n+1}(0) = f_n(1)$. En déduire que

$$f_n(1) = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

- c) Établir enfin, pour tout réel $x \in [0, 1]$, que

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t) dt + \int_x^1 f_n(t) dt.$$

- d) On note f l'application définie sur chaque intervalle $[n, n+1[$, où $n \in \mathbb{N}$, par $f(x) = f_n(x - n)$. Ainsi, f est définie sur $[0, +\infty[$. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie

$$f(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$$

pour tout réel $x \geq 1$.

3. On prolonge la fonction f définie ci-dessus sur $[0, +\infty[$ en une fonction définie sur $[-1, +\infty[$. À cet effet, on pose

$$f(x) = f(x+1) - f'(x+1) \quad \text{pour } -1 \leq x < 0.$$

Montrer que f est continue sur $[-1, +\infty[$ et vérifie

$$f(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$$

pour tout réel $x \geq 0$. En réitérant ce même procédé sur $[-2, +\infty[$, $[-3, +\infty[$, etc., on obtient une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(f)(x) = f(x)$ pour tout réel x (on ne demande pas d'explicitier ce raisonnement).

3 Partie III – Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\varphi)$

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales.

On désigne toujours par f une application de $E_1(\varphi)$ et par n un entier naturel.

1. On étudie les suites (M_n) et (m_n) des maxima et minima de f sur $[n, n+1]$.
 - a) Justifier l'existence du maximum M_n de f sur $[n, n+1]$, puis celle d'un réel $x_n \in [n, n+1]$ tel que $f(x_n) = M_n$.
 - b) On suppose $n \geq 1$. Montrer que :
 - $f'(x_n) = 0$ si $n < x_n < n+1$, et comparer alors $f(x_n - 1)$ à $f(x_n)$;
 - f est constante sur $[n, n+1]$ si $x_n = n+1$.
 En déduire dans tous les cas que $M_{n-1} \geq M_n$.
 - c) On définit de même le minimum m_n de f sur $[n, n+1]$. Établir la monotonie de la suite (m_n) et en déduire la convergence des suites (M_n) et (m_n) .
2. On étudie l'existence d'une limite éventuelle de f en $+\infty$ et l'on pose

$$L = 2 \int_0^1 t f(t) dt.$$

- a) Calculer la dérivée de l'application $x \mapsto g(x) = \int_x^{x+1} (t-x)f(t) dt$ et exprimer $g(x)$ à l'aide de L .
- b) Justifier l'inégalité suivante pour $x \geq n$:

$$0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(M_n - f(t)) dt \leq M_n - f(x+1).$$

En l'appliquant avec $x = x_{n+1} - 1$, en déduire que

$$0 \leq \frac{M_n - L}{2} \leq M_n - M_{n+1}.$$

- c) Établir une inégalité analogue faisant intervenir L , m_n et m_{n+1} , et en déduire enfin que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$.

4 Partie IV – Recherche des fonctions bornées de $E_1(\varphi)$

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales.

On désigne maintenant par f une application bornée de $E_1(\varphi)$ et l'on note

$$M = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}.$$

1. On étudie la fonction u_0 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = \int_{x-1}^x (f(t) - f(x))^2 dt.$$

- a) Comparer u_0 et $\varphi(f^2) - f^2$.
 - b) Calculer la dérivée de u_0 et en déduire le sens de variation de u_0 .
2. On définit alors par récurrence, à partir de u_0 , une suite de fonctions (u_n) définies sur $\mathbb{R}$ par

$$u_n = \varphi(u_{n-1}), \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n(x) = \int_{x-1}^x u_{n-1}(t) dt.$$

- a) Calculer la dérivée de u_n et en déduire le sens de variation de u_n .
- b) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n(x))$ lorsque le réel x est fixé.
- c) Établir, pour tout réel x et tout entier naturel n , l'inégalité suivante :

$$0 \leq \sum_{k=0}^n u_k(x) \leq M^2.$$

- d) En déduire que la suite $(u_n(x))$ converge vers 0, puis que f est constante sur $\mathbb{R}$.