HEC Paris – ESCP-EAP – EM Lyon

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2003

Table des matières

1 Étude d'un exemple **2**

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction. 2

2 Les axes principaux d'inertie d'un nuage **2**

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; algèbre bilinéaire. 2

3 Une décomposition de la matrice X **3**

Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction. 3

4 Une norme euclidienne de matrices **4**

Thèmes abordés : algèbre bilinéaire ; applications linéaires. 4

5 La meilleure approximation du nuage **4**

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; algèbre bilinéaire. 4

6 Non multa, sed multum **5**

Thèmes abordés : réduction ; estimations. 5

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Nuages de points et approximation d'un nuage

Dans tout le problème, n et p désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et l'on pose $E_p = M_{p,1}(\mathbb{R})$. L'espace E_p est muni de sa structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne d'un vecteur x de E_p est notée $\|x\|$ et le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E_p est noté $\langle x, y\rangle$.

Si u est un vecteur non nul de E_p, D_u désigne la droite vectorielle engendrée par u et, pour $x \in E_p$, $P_{D_u}(x)$ est le projeté orthogonal de x sur D_u. Si F est un sous-espace vectoriel de E_p, son supplémentaire orthogonal est noté $F^\perp$. Pour $A \in M_{m,\ell}(\mathbb{R})$, Φ_A désigne l'application linéaire de $M_{\ell,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{m,1}(\mathbb{R})$ définie par $\Phi_A(X) = AX$. Enfin, pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $(u_i)_{1\leq i\leq r}$ une famille de vecteurs de E_p, $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_r)$ est le sous-espace engendré par cette famille.

Si g est définie sur un sous-espace vectoriel F de E_p et à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'expression $\max_{x\in F,\ \|x\|=1} g(x)$ désigne le maximum, lorsqu'il existe, de g sur les vecteurs unitaires de F.

1 Étude d'un exemple

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction.

Dans cette partie uniquement, on suppose que $p = 2$. On note (u_1, u_2) la base canonique de E_2.

1. On considère les vecteurs v_1, v_2, v_3 de E_2, de coordonnées respectives $(1, 2)$, $(-3, -1)$ et $(2, -1)$ dans la base (u_1, u_2). Pour $m \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, on note v_i' le projeté orthogonal de v_i sur la droite engendrée par $u_1 + mu_2$.
   a) Calculer, en fonction de m, $\|v_1'\|^2 + \|v_2'\|^2 + \|v_3'\|^2$.
   b) Déterminer la valeur m_0 de m pour laquelle cette quantité atteint son maximum, noté λ_1.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que λ_1 est une valeur propre de Φ_{X^tX}, et que $u_1 + m_0u_2$ est un vecteur propre associé.
   b) Déterminer l'autre valeur propre de Φ_{X^tX} et la comparer à λ_1.

2 Les axes principaux d'inertie d'un nuage

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; algèbre bilinéaire.

Les notations introduites dans cette partie seront utilisées dans toute la suite. On définit la matrice $X = (x_{ij})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq j\leq n} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, appelée *nuage* ; ses colonnes $c_1, \ldots, c_n$ sont les points du nuage. On pose $V = X^tX$ et $F = \mathrm{Vect}(c_1, \ldots, c_n)$. On suppose $\dim F = r$ et $p > r > 1$.

Pour $v \in E_p \setminus \{0\}$, on pose $I(v) = \sum_{j=1}^n \|P_{D_v}(c_j)\|^2$, appelée inertie du nuage X sur D_v. Pour $(v, w) \in E_p^2$, on pose $J(v, w) = \sum_{j=1}^n \langle v, c_j\rangle\langle w, c_j\rangle$.

1. a) Montrer que V est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres, avec $\lambda_1 > \cdots > \lambda_p$. Justifier l'existence d'une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de E_p telle que $Ve_i = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

   b) Montrer que $\ker \Phi_V = \ker \Phi_{{}^t X}$, puis en déduire que $\mathrm{rg}(V) = r$, que $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_p = 0$, préciser ce que l'on peut dire de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, et montrer que $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de F.

2. a) Montrer que, pour tout vecteur unitaire v de E_p, $I(v) = {}^t vVv$.

   b) Déterminer $I(e_i)$ à l'aide de $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

   c) On définit $F_1 = F$ et, pour $i \geq 2$, $F_i = F_{i-1} \cap D_{e_{i-1}}^{\perp}$. Montrer que $F_i = \mathrm{Vect}(e_i, \dots, e_r)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$, puis que

$$I(e_1) = \max_{\|v\|=1} I(v) = \max_{v \in F_1,\ \|v\|=1} I(v), \qquad I(e_i) = \max_{v \in F_i,\ \|v\|=1} I(v).$$

3. Soit w un vecteur unitaire de E_p tel que $I(w) = \max_{\|v\|=1} I(v)$. Montrer que $w \in F$.

4. On suppose que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ sont des vecteurs unitaires de E_p et que $G_1, \dots, G_r$ sont des sous-espaces vérifiant

$$\begin{cases} G_1 = F, \quad \varepsilon_1 \in G_1, \quad I(\varepsilon_1) = \max_{v \in G_1,\ \|v\|=1} I(v), \\ \varepsilon_i \in G_i = G_{i-1} \cap D_{\varepsilon_{i-1}}^{\perp}, \quad I(\varepsilon_i) = \max_{v \in G_i,\ \|v\|=1} I(v) \quad (2 \leq i \leq r). \end{cases}$$

   Les droites $D_{\varepsilon_1}, \dots, D_{\varepsilon_r}$ sont appelées axes principaux d'inertie du nuage.

   a) Vérifier que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est une base orthonormale de F et que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E_p.

   b) Montrer que $J(v, w) = {}^t vVw = \langle v, \Phi_V(w) \rangle$ pour tout $(v, w) \in E_p^2$.

   c) Soient v_1, v_2 deux vecteurs unitaires, orthogonaux, appartenant à F. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(t) = I(\cos(t)v_1 + \sin(t)v_2)$. Exprimer $\varphi(t)$ à l'aide de $I(v_1)$, $I(v_2)$, $J(v_1, v_2)$ et t. Montrer que φ est majorée sur $\mathbb{R}$ et admet un maximum. Si ce maximum est atteint en 0, montrer que $J(v_1, v_2) = 0$.

   d) Montrer que $J(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ si $i \neq j$, déterminer la matrice de Φ_V dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$, puis en déduire que ε_i est un vecteur propre de V associé à λ_i pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

5. Les colonnes c_j de X représentent des individus d'une population statistique où les p variables x_i ont pris les valeurs $x_{i1}, \dots, x_{in}$, de moyenne nulle : $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 0$ pour $1 \leq i \leq p$. Calculer $\mathrm{cov}(x_k, x_\ell)$ puis comparer V à la matrice $(\mathrm{cov}(x_k, x_\ell))_{1 \leq k, \ell \leq p}$.

3 Une décomposition de la matrice X

Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note Π_i la matrice, dans la base canonique de E_p, de la projection orthogonale sur D_{e_i}.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^p \Pi_i = I_p$.
2. Déterminer $\Pi_i \Pi_j$ pour $i \neq j$.
3. Calculer $\Pi_i X$ pour $i \in [\![r+1, p]\!]$ et en déduire $X = \sum_{i=1}^r \Pi_i X$.
4. Pour $s \in [\![1, r]\!]$, on pose $X_s = \sum_{i=1}^s \Pi_i X$.

a) Montrer que $\operatorname{Im}\Phi_{X_s} \subset \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_s)$.

b) Calculer ${X_s}^t X e_j$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ et déterminer le rang de X_s.

4 Une norme euclidienne de matrices

Thèmes abordés : algèbre bilinéaire ; applications linéaires.

Pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in M_q(\mathbb{R})$, on pose $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^q a_{ii}$. On admet que tr est linéaire, que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ lorsque les produits sont définis, et que deux matrices semblables ont même trace. Pour $M, N \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, on pose $\Theta(M, N) = \operatorname{tr}({}^tMN)$ et, pour $M \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $|||M||| = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tMM)}$.

1. Montrer que $(M, N) \mapsto \Theta(M, N)$ est un produit scalaire sur $M_{p,n}(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\Theta(\Pi_i X, \Pi_j X)$ pour $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, en distinguant $i = j$ et $i \neq j$, et exprimer le résultat à l'aide des λ_i.
3. Calculer $|||X - X_s|||^2$ en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, pour $s \in [\![1, r]\!]$.

5 La meilleure approximation du nuage

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; algèbre bilinéaire.

On rappelle que $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$ pour deux sous-espaces vectoriels de E_p. Soit $s \in [\![1, r-1]\!]$ et $N \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à s.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormale $(a_1, \dots, a_p)$ de E_p formée de vecteurs propres de $(X - N)^t(X - N)$. On note $\gamma_1 > \cdots > \gamma_p$ les valeurs propres associées.
2. Soit $i \in [\![1, r - s]\!]$ et G un sous-espace de dimension au moins i.
   a) Montrer que $\dim\big(G \cap \operatorname{Vect}(a_i, \dots, a_p)\big) \geq 1$.
   b) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire $u \in G$ tel que $\|{}^t(X - N)u\|^2 \leq \gamma_i$.
   c) Poser $H = \ker\Phi_{{}^tN} \cap \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{s+i})$. Montrer que $\dim H \geq i$, puis en déduire $\lambda_{s+i} \leq \gamma_i$.
3. a) Montrer que $|||X - N|||^2 = \sum_{i=1}^p \gamma_i$.
   b) En déduire que $|||X - N|||^2 \geq \sum_{i=s+1}^r \lambda_i$.
   c) En déduire que X_s réalise la meilleure approximation de X par les matrices de rang inférieur ou égal à s, au sens de la norme euclidienne précédente.
4. Pour un sous-espace vectoriel G de E_p, on note P_G la projection orthogonale sur G, Π_G sa matrice dans la base canonique et $K(G) = \sum_{j=1}^n \|P_G(c_j)\|^2$.
   a) Montrer que $K(G) = |||\Pi_G X|||^2$.
   b) Montrer que $K(G) = |||X|||^2 - |||X - \Pi_G X|||^2$.
   c) Si $\dim G \leq s$, montrer que $K(G) \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i$, puis que $K(\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_s))$ est le maximum des $K(G)$ lorsque G parcourt les sous-espaces de dimension au plus s.
   d) Supposer ici $s \in [\![1, p]\!]$, sans supposer $s \leq r - 1$. Montrer que $K(\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_s))$ est encore le maximum des $K(G)$ pour $\dim G \leq s$.

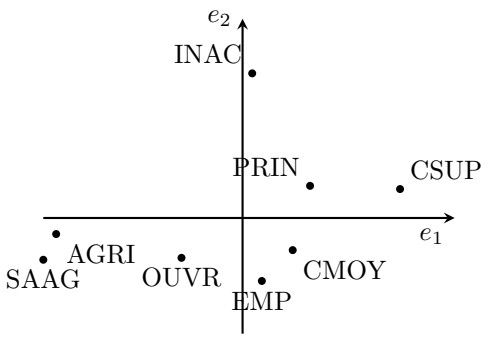
6 Non multa, sed multum

Thèmes abordés : réduction ; estimations.

On interprète les résultats précédents à partir d'une enquête de consommations. On étudie les consommations annuelles de huit denrées alimentaires, correspondant aux huit variables statistiques centrées x_i $(1 \leq i \leq 8)$, dans les catégories socio-professionnelles suivantes : exploitants agricoles (AGRI, colonne c_1), salariés agricoles (SAAG, c_2), professions indépendantes (PRIN, c_3), cadres supérieurs (CSUP, c_4), cadres moyens (CMOY, c_5), employés (EMP, c_6), ouvriers (OUVR, c_7) et inactifs (INAC, c_8). Un individu est donc ici une catégorie socio-professionnelle.

Les résultats sont consignés dans $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq 8}$; par exemple x_{12} est la consommation moyenne de la denrée 1 par les salariés agricoles. Les valeurs propres de $V = X^t X$ sont approximativement 70, 20, 5, 3, 2, 0, 0 et 0, associées respectivement à $e_1, \ldots, e_8$.

1. Quelle part de l'inertie totale est contenue dans l'inertie du nuage sur le sous-espace de base (e_1, e_2) ? Le dessin ci-dessous représente les projetés orthogonaux des huit individus sur ce plan.



2. Que représente le nuage de points du dessin pour le nuage X de l'enquête ?