
ESSEC

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2004

Table des matières

1 Étude d’une suite de vecteurs	2
<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; algèbre bilinéaire.</i>	<i>2</i>
2 Un problème de minimisation	3
<i>Thèmes abordés : fonctions d’une variable.</i>	<i>3</i>
3 Résolution itérative d’un système $AX = B$	4
<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; suites.</i>	<i>4</i>

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul. On identifie tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$ à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Sa transposée est la matrice-ligne ${}^tX = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Le produit scalaire canonique de deux vecteurs X, Y de $\mathbb{R}^n$ est

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

et la norme euclidienne de X est $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$. Une suite de vecteurs (X_p) de $\mathbb{R}^n$ converge vers $X \in \mathbb{R}^n$ si $\|X_p - X\|$ converge vers 0.

Enfin, I désigne la matrice identité d'ordre n et A une matrice symétrique réelle d'ordre n .

1 Étude d'une suite de vecteurs

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; algèbre bilinéaire.

1. Dans cette question, C est un vecteur non nul de composantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de $\mathbb{R}^n$.
 - a) Expliciter le produit matriciel $C^t C$. La matrice $C^t C$ est-elle diagonalisable ?
 - b) Exprimer $(C^t C)^2$ en fonction de $C^t C$ et de la norme de C .
 - c) En déduire que toute valeur propre de $C^t C$ est égale à 0 ou à $\|C\|^2$.
 - d) Préciser le sous-espace propre associé à 0. Calculer $C^t C C$ en fonction de C et préciser le sous-espace propre associé à $\|C\|^2$.
 - e) En déduire la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $C^t C$. Montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale lorsque le vecteur C est unitaire.
2. Dans cette question, X et Y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
 - a) Établir que ${}^tXY = {}^tYX$, ${}^tXAY = \langle X, AY \rangle = \langle AX, Y \rangle$ et

$$({}^tXY)^2 = {}^tX(Y^tY)X = {}^tY(X^tX)Y.$$

- b) Justifier l'existence d'une base orthonormale de vecteurs $U_1, U_2, \dots, U_n$ de $\mathbb{R}^n$ et de réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que, pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq n$, $AU_i = \lambda_i U_i$.
- c) Exprimer les vecteurs X et AX dans la base $(U_1, U_2, \dots, U_n)$, ainsi que leurs normes, à l'aide des produits scalaires $\langle U_i, X \rangle$ et $\langle U_i, AX \rangle$. Prouver ensuite l'égalité

$$\langle X, AX \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle U_i, X \rangle^2.$$

d) En déduire les égalités matricielles

$$I = \sum_{i=1}^n U_i^t U_i \quad \text{et} \quad A = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i^t U_i.$$

Reconnaître les endomorphismes canoniquement associés aux matrices $U_i^t U_i$.

e) En déduire les inégalités

$$\min_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i) \|X\|^2 \leq \langle X, AX \rangle \leq \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i) \|X\|^2.$$

f) Application : encadrer par deux nombres entiers les valeurs propres de la matrice d'ordre n dont tous les éléments sont nuls, sauf sur les trois diagonales centrales :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Dans cette question, on note $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} (|\lambda_i|)$.

a) Vérifier que

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \langle U_i, X \rangle^2.$$

Prouver que $\|AX\| \leq \rho(A)\|X\|$ et exhiber un vecteur réalisant l'égalité.

b) Établir l'équivalence des propositions suivantes :

- i. Pour tout vecteur X , la suite $(A^p X)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.
- ii. $\rho(A) < 1$.

2 Un problème de minimisation

Thèmes abordés : fonctions d'une variable.

Dans toute cette partie, $\mathbb{R}_p[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à p , et α, β sont deux réels vérifiant $0 < \alpha < \beta$. On se propose de minimiser

$$\sup\{|Q(t)|; \alpha \leq t \leq \beta\},$$

où Q décrit $\mathbb{R}_p[X]$ et vérifie $Q(0) = 1$.

1. On considère la suite de fonctions (T_p) définie par $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$ et, si $p \geq 1$, par la relation de récurrence

$$T_{p+1}(t) = 2tT_p(t) - T_{p-1}(t).$$

- a) Montrer que T_p est une fonction polynomiale de degré p et préciser le coefficient de t^p .
- b) Prouver, pour tout réel θ et tout entier naturel p , que

$$T_p(\cos \theta) = \cos(p\theta).$$

On pourra utiliser la formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

- c) En déduire $\sup\{|T_p(t)|; -1 \leq t \leq 1\}$ et montrer que T_p admet dans $[-1, 1]$ p zéros distincts que l'on précisera.
2. Soit a un réel tel que $|a| > 1$. On se propose de minimiser

$$\sup\{|Q(t)|; -1 \leq t \leq 1\},$$

où Q décrit $\mathbb{R}_p[X]$ et vérifie $Q(a) = 1$. Pour cela, on désigne par S_p la fonction $T_p/T_p(a)$.

- a) On considère, s'il en existe, une fonction polynomiale P de $\mathbb{R}_p[X]$ telle que $P(a) = 1$ et vérifiant

$$\sup\{|P(t)|; -1 \leq t \leq 1\} < \frac{1}{|T_p(a)|}.$$

Préciser, pour $0 \leq j \leq p$, le signe de

$$S_p\left(\cos \frac{j\pi}{p}\right) - P\left(\cos \frac{j\pi}{p}\right).$$

En déduire que $S_p - P$ a au moins $p + 1$ racines réelles distinctes, puis obtenir une contradiction en examinant son degré.

- b) En déduire que $\sup\{|Q(t)|; -1 \leq t \leq 1\}$, où Q décrit $\mathbb{R}_p[X]$ et vérifie $Q(a) = 1$, est minimal pour S_p et vaut $1/|T_p(a)|$.
- c) Si P est un polynôme satisfaisant ce problème de minimisation, montrer que $(P + S_p)/2$ le satisfait également et que, pour $0 \leq j \leq p$,

$$\frac{1}{2} \left| P\left(\cos \frac{j\pi}{p}\right) + S_p\left(\cos \frac{j\pi}{p}\right) \right| = \frac{1}{|T_p(a)|}.$$

En déduire que $P = S_p$.

3. Établir que le polynôme suivant est l'unique solution du problème de minimisation posé dans le préambule de cette partie :

$$\frac{T_p\left(\frac{2t - \alpha - \beta}{\beta - \alpha}\right)}{T_p\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right)}.$$

3 Résolution itérative d'un système $AX = B$

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; suites.

On suppose dans cette partie que les valeurs propres de A sont strictement positives et classées ainsi : $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. On étudie une méthode itérative de résolution du système de Cramer $AX = B$, définie à partir d'une suite de réels strictement positifs (α_p) et d'un vecteur X_0 de $\mathbb{R}^n$ par

$$X_{p+1} = X_p + \alpha_p(B - AX_p).$$

Justifier l'existence et l'unicité de la solution X^* du système.

1. Dans cette question, on suppose la suite (α_p) constante, égale à $\alpha > 0$.
- a) Montrer, pour tout entier naturel p , que

$$X_p - X^* = (I - \alpha A)^p(X_0 - X^*).$$

- b) Préciser les valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ de la matrice $I - \alpha A$, ainsi que $\rho(I - \alpha A) = \max_{1 \leq i \leq n} (|\mu_i|)$. Tracer la courbe représentative de la fonction définie par $f(\alpha) = \rho(I - \alpha A)$.
- c) En déduire que (X_p) converge vers X^* si et seulement si $\alpha < 2/\lambda_n$. Montrer que la convergence est optimale, en un sens que l'on précisera, pour $\alpha = 2/(\lambda_1 + \lambda_n)$ et montrer qu'alors

$$\|X_p - X^*\| \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} \right)^p \|X_0 - X^*\|.$$

2. On revient au cas général et l'on pose, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$P_p(t) = (1 - \alpha_0 t)(1 - \alpha_1 t) \cdots (1 - \alpha_{p-1} t)$$

et

$$P_p(A) = (I - \alpha_0 A)(I - \alpha_1 A) \cdots (I - \alpha_{p-1} A).$$

- a) Préciser les valeurs propres $\nu_1, \dots, \nu_n$ de la matrice $P_p(A)$ et montrer que

$$\rho(P_p(A)) = \max_{1 \leq i \leq n} (|\nu_i|) \leq \sup\{|P_p(t)|; \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n\}.$$

- b) Établir que $X_p - X^* = P_p(A)(X_0 - X^*)$, puis que

$$\|X_p - X^*\| \leq \sup\{|P_p(t)|; \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n\} \|X_0 - X^*\|.$$

- c) Lorsque l'entier p est fixé, comment choisir les nombres α_j , où $0 \leq j \leq p-1$, afin de minimiser le réel $\sup\{|P_p(t)|; \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n\}$? Établir qu'on a alors

$$\|X_p - X^*\| \leq \frac{1}{\left| T_p \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} \right) \right|} \|X_0 - X^*\|.$$

Montrer que

$$\left| T_p \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} \right) \right| \sim 2^{p-1} \left(\frac{\lambda_n + \lambda_1}{\lambda_n - \lambda_1} \right)^p \quad \text{lorsque } p \rightarrow +\infty.$$

Comparer la convergence de la méthode itérative à α constant avec celle de la méthode itérative optimale développée dans cette question.