ESSEC

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2005

Table des matières

1 Partie I **2**

Thèmes abordés : fonctions d'une variable. 2

2 Partie II **3**

Thèmes abordés : algèbre bilinéaire ; réduction. 3

3 Partie III **4**

Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; suites. 4

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Notations

Dans tout ce problème, on considère n un entier naturel non nul. Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ sa transposée.

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique, à l'ensemble des matrices colonnes à n lignes ; ainsi, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note x_i sa i-ème coordonnée et

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $\langle x, y \rangle = {}^txy$, et la norme euclidienne de x est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

On désigne par U une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. À toute fonction continue f de U dans $\mathbb{R}$, et à tout vecteur y de $\mathbb{R}^n$, on associe la fonction F_y définie sur U par

$$x \longmapsto \langle x, y \rangle - f(x),$$

et on note $U(f)$ l'ensemble, éventuellement vide, des vecteurs y de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels F_y admet un maximum.

Lorsque $U(f)$ est non vide, on appelle fonction conjuguée de f la fonction notée $f^\star$ définie sur $U(f)$ par

$$f^\star(y) = \max\{F_y(x) \mid x \in U\}.$$

1 Partie I

Thèmes abordés : fonctions d'une variable.

Dans cette partie, $n = 1$ et U est un intervalle de $\mathbb{R}$; ainsi le produit scalaire se confond avec le produit naturel sur $\mathbb{R}$ et la fonction F_y est définie sur l'intervalle U par $F_y(x) = xy - f(x)$.

1. Lorsque U est un segment de $\mathbb{R}$, montrer que $f^\star$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. **Quelques exemples.** Après avoir étudié les variations de F_y, préciser $U(f)$ et $f^\star$ dans les cas suivants :
   a) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^2}{2}$ où a est un réel fixé strictement positif.
   b) $U = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$ où α est un réel fixé strictement supérieur à 1. On pourra introduire le réel β vérifiant $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.
   c) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.
3. Pour chacun des cas précédents, déterminer $(f^\star)^\star$ ainsi que son ensemble de définition. Quel constat pouvez-vous faire ?
4. Plus généralement, on suppose que $U = \mathbb{R}$ et f est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction dérivée est $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant, pour tout réel x, $f''(x) > 0$.

a) Établir que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note g l'application réciproque de f'.

b) Après avoir dressé le tableau des variations de l'application F_y associée à f et y, montrer que $U(f) = \mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^\star(x) = xg(x) - f(g(x)).$$

Justifier la dérivabilité de $f^\star$ et exprimer $(f^\star)'$ en fonction de g.

c) Après avoir étudié, pour y réel, les variations de l'application $x \mapsto xy - f^\star(x)$, en déduire que $(f^\star)^\star = f$.

2 Partie II

Thèmes abordés : algèbre bilinéaire ; réduction.

On revient aux notations du préambule.

1. On suppose dans cette question que $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \|x\|$.

   a) Pour t réel strictement positif et $y \in \mathbb{R}^n$, calculer $F_y(ty)$ et préciser $\lim\limits_{t\to+\infty} F_y(ty)$. Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les ensembles $U(f)$ et $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}$?

   b) Lorsque $\|y\| \leq 1$, montrer que $F_y(x) \leq F_y(0)$. En déduire $U(f)$ et $f^\star$.

   c) Préciser $(f^\star)^\star$.

   Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On rappelle que

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle x, Ax' \rangle = \langle x', Ax \rangle.$$

2. On suppose dans cette question que $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \dfrac{\langle x, Ax\rangle}{2}$. Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on définit ainsi F_y sur $\mathbb{R}^n$ par $F_y(x) = \langle x, y\rangle - \dfrac{\langle x, Ax\rangle}{2}$.

   a) En utilisant un changement de base orthonormale, établir l'encadrement

$$\lambda\|x\|^2 \leq \langle x, Ax\rangle \leq \mu\|x\|^2,$$

   lorsque λ (respectivement μ) désigne la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A.

   b) Pour x et h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, exprimer $F_y(x+h) - F_y(x)$ en fonction de $\langle h, Ah\rangle$ et $\langle h, y - Ax\rangle$, et établir que $F_y(x+h) - F_y(x) \leq \langle h, y - Ax\rangle$.

   c) Montrer que, pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un maximum obtenu pour $x = A^{-1}y$, et préciser $U(f)$, $f^\star$ et $(f^\star)^\star$.

3. On reprend la même fonction qu'à la question 2), c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{\langle x, Ax\rangle}{2}$, mais dans cette question, on suppose que U est une partie convexe, fermée non vide de $\mathbb{R}^n$. On prolonge, de façon naturelle et pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, F_y à $\mathbb{R}^n$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad F_y(x) = \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, Ax\rangle}{2}.$$

   a) **Existence d'un maximum.**

— Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} F_y(x) = -\infty$; en déduire que, pour $x_0 \in U$, il existe r strictement positif vérifiant $\big(\|x\| > r \Rightarrow F_y(x) < F_y(x_0)\big)$.

— Établir que l'ensemble $U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$, et en déduire que $U(f) = \mathbb{R}^n$.

b) **Unicité d'un élément réalisant le maximum.**

— Pour x et x' deux vecteurs de U et $y \in \mathbb{R}^n$, établir la relation

$$F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{\langle x-x', A(x-x')\rangle}{8}.$$

— En supposant que $\overline{x}$ et $\overline{x'}$ sont deux vecteurs distincts réalisant le maximum de F_y, montrer que $f^\star(y) < F_y\Big(\frac{1}{2}(\overline{x}+\overline{x'})\Big)$ puis établir une contradiction.

3 Partie III

Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; suites.

Dans toute cette partie, c désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et B une matrice carrée non nulle à n lignes et n colonnes.

On reprend la même fonction et les mêmes conventions qu'en II.3) et on choisit pour U l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Bx = c$. On note $\operatorname{Im} M$ et $\operatorname{Ker} M$ l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée M d'ordre n.

On suppose que $c \in \operatorname{Im} B$; ainsi U est une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^n$ (on ne demande pas de le vérifier). D'après les résultats obtenus dans la partie II, on sait que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, F_y admet un unique vecteur $\overline{x}$ appartenant à U et réalisant le maximum de F_y. L'objectif de cette partie est de donner une caractérisation de $\overline{x}$ et d'établir un algorithme de recherche.

1. **Caractérisation de $\overline{x}$.**

a) Vérifier que pour tout x, x' de $\mathbb{R}^n$, $\langle x, Bx'\rangle = \langle {}^tBx, x'\rangle$. Montrer que $\operatorname{Im} {}^tB \subset (\operatorname{Ker} B)^\perp$, en désignant par $(\operatorname{Ker} B)^\perp$ l'orthogonal de la partie $\operatorname{Ker} B$. Justifier l'égalité des dimensions de $\operatorname{Im} {}^tB$ et de $(\operatorname{Ker} B)^\perp$ et en déduire que

$$\operatorname{Im} {}^tB = (\operatorname{Ker} B)^\perp.$$

On admettra que $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}({}^tB)$.

b) Lorsque h est un vecteur de $\operatorname{Ker} B$ et t un réel, établir la relation

$$F_y(\overline{x}+th) - F_y(\overline{x}) = t\langle y - A\overline{x}, h\rangle - t^2\frac{\langle h, Ah\rangle}{2}.$$

En déduire que $\overline{x}$ est caractérisé par l'existence de $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant les deux conditions $B\overline{x} = c$ et $y - A\overline{x} = {}^tB\overline{z}$.

2. **Un algorithme de recherche de $\overline{x}$.**

On désigne par r un réel strictement positif et z_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on définit les suites $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad Ax_p - y + {}^tBz_p = 0 \qquad \text{et} \qquad z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c).$$

a) Montrer que les deux suites sont bien définies et qu'elles vérifient les deux relations

$$A(x_p - \overline{x}) = {}^tB(\overline{z} - z_p) \qquad \text{et} \qquad z_{p+1} - \overline{z} = z_p - \overline{z} + rB(x_p - \overline{x}).$$

b) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \|z_{p+1} - \overline{z}\|^2 = \|z_p - \overline{z}\|^2 - 2r\langle x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x})\rangle + r^2\|B(x_p - \overline{x})\|^2.$$

c) Démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n symétrique à valeurs propres strictement positives notée $A^{1/2}$ et vérifiant $(A^{1/2})^2 = A$. On note $A^{-1/2}$ la matrice inverse de $A^{1/2}$.

— Montrer la relation $\|BA^{-1/2}x\|^2 = \langle x, A^{-1/2t}BBA^{-1/2}x\rangle$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$.

— Établir que la matrice $A^{-1/2t}BBA^{-1/2}$ est symétrique et que sa plus grande valeur propre α est strictement positive.

— En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a $\|Bx\|^2 \leq \alpha\langle x, Ax\rangle$.

d) On choisit $r \in \left]0, \dfrac{2}{\alpha}\right[$. Montrer que

$$\|z_{p+1} - \overline{z}\|^2 - \|z_p - \overline{z}\|^2 \leq r(r\alpha - 2)\langle x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x})\rangle \leq 0.$$

En déduire que la suite $(\|z_p - \overline{z}\|)_{p\in\mathbb{N}}$ est monotone convergente, puis que x_p converge vers $\overline{x}$.