HEC Paris – ESCP Europe – EM Lyon

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2005

Table des matières

1 Problème – Propriétés de la fonction Gamma **2**

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; séries. 2

2 Estimation des paramètres d'une loi Gamma **4**

Thèmes abordés : variables à densité ; estimations ; fonctions de plusieurs variables. . . 4

3 Estimateur sans biais de l'écart-type d'une loi normale centrée **5**

Thèmes abordés : variables à densité ; estimations. 5

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

On rappelle que, pour $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est convergente et définit la fonction Gamma :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et f k fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on note $f^{(k)}$ sa dérivée k-ième ; les dérivées première et seconde sont aussi notées f' et f''. Dans les parties II et III, exp désigne la fonction exponentielle. Les parties III et IV sont indépendantes.

1 Problème – Propriétés de la fonction Gamma

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; séries.

Partie I – Une expression de $\Gamma(x)$

1. Soit $n \geq 1$ un entier.

   a) Montrer que, pour $0 \leq u < 1$, $\ln(1-u) \leq -u$. En déduire que, pour $t \in [0, n]$,

   $$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

   b) Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0, \sqrt{n}[$ par

   $$\varphi(t) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t - n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

   Établir que, pour $t \in [0, \sqrt{n}]$,

   $$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

   c) Justifier que, pour $t \in [0, n]$,

   $$e^{-t} - \frac{t^2}{n}e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

   En déduire que, pour tout $x > 0$,

   $$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt.$$

2. Pour $x > 0$, poser $B_0(x) = \int_0^1 y^{x-1}\,dy$ et, pour $n \geq 1$, $B_n(x) = \int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\,dy$.

   a) Montrer que ces intégrales sont convergentes.

   b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$B_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

   En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n(x) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$.

c) Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$. En déduire, pour $x > 0$,

$$\Gamma(x+n) \sim_{n\to+\infty} n^x (n-1)!.$$

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, poser $\lambda_n = \dfrac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)}$. Montrer que $\lambda_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

Partie II – Dérivabilité de la fonction Gamma et conséquences

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on note $g_k(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}\,dt$.
   a) Montrer que cette intégrale est absolument convergente.
   b) Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x_0, x \in]a,b[$, $x \neq x_0$. Établir

$$|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x-x_0)g_1(x_0)| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \left(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right) e^{-t}\,dt.$$

   c) Montrer que la dernière intégrale est majorée par

$$\int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1} e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{b-1} e^{-t}\,dt.$$

   En déduire que Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.
   d) Établir que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma' = g_1$. On admet pour la suite que Γ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma'' = g_2$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, poser $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k}$.
   a) Établir, pour $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \dfrac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$. En déduire $0 < \gamma_n \leq 1$.
   b) Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente. On note γ sa limite.

3. Soit $x > 0$.
   a) Montrer que, pour $n \geq 1$,

$$\prod_{k=1}^n \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right] = \exp(-x\gamma_n)\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!}.$$

   b) Poser $v_n(x) = \prod_{k=1}^n \left[(1+\frac{x}{k})\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right]$. Montrer que $(v_n(x))$ converge, de limite $\ell(x)$, et que

$$\ell(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x\Gamma(x)}.$$

4. Soit $x > 0$.
   a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{x}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, pour $n \geq 1$, est convergente.
   b) Justifier $\ln(\ell(x)) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\dfrac{x}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right]$, puis en déduire

$$\ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right].$$

5. Soit $\psi(x) = \dfrac{d}{dx}[\ln(\Gamma(x))]$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Établir $\psi(x+1) = \psi(x) + \dfrac{1}{x}$. Déterminer un équivalent simple de $\psi(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et justifier, pour $n \geq 2$,

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

6. Pour $n \geq 1$, considérer $U_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$, et noter $A(x)$ la somme de la série de terme général $U_n(x)$.
   a) Montrer que A est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer $A'(x)$ et $A''(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$, $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$.
   b) Soit $x > 0$. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente. On admet pour la suite que $A'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$ et $A''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n''(x)$.
   c) Calculer $\psi(1)$ en fonction de γ. En déduire $\lim_{n\to+\infty}(\ln n - \psi(n))$.
7. On veut établir que, pour tout $y > 0$, $\psi'(y) > \dfrac{1}{y}$. Soit $x > 0$ et $G(t) = \dfrac{1}{(t+x)^2}$.
   a) Montrer que G est positive, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\int_1^{+\infty} G(t)\,dt$ est convergente.
   b) En déduire $0 < \int_1^{+\infty} G(t)\,dt < \sum_{k=1}^{+\infty} G(k)$.
   c) Établir $\psi'(x) > \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2}$, puis conclure.

2 Estimation des paramètres d'une loi Gamma

Thèmes abordés : variables à densité ; estimations ; fonctions de plusieurs variables.

Pour $\theta > 0$ et $r > 0$, on dit que X suit une loi Gamma à deux paramètres, notée $\Gamma(\theta, r)$, lorsque X/θ suit la loi Gamma à un paramètre de forme r, notée $\gamma(r)$. Une densité de X est alors

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r)\theta^r} x^{r-1} \exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

On considère $X \sim \Gamma(\theta, r)$, où $\theta, r > 0$ sont inconnus, et un p-échantillon i.i.d. $(X_1, \ldots, X_p)$, avec $p \geq 2$. Pour des réalisations fixées $x_1, \ldots, x_p > 0$, non toutes égales, on pose $L(\theta, r) = \prod_{i=1}^p f(x_i)$ et $F(\theta, r) = \ln L(\theta, r)$.

1. Montrer que la recherche du maximum de L sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est équivalente à celle du maximum de F sur ce même ensemble.
2. a) Établir l'existence des dérivées partielles d'ordres un et deux de F sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et les calculer.
   b) Montrer que les éventuels points critiques (θ^*, r^*) vérifient

$$\begin{cases} \theta^* r^* = \overline{x}, \\ \ln r^* - \dfrac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} = \ln \overline{x} - \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^p \ln x_i, \end{cases} \qquad \overline{x} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^p x_i.$$

3. Poser $K_p = \ln \overline{x} - \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \ln x_i$.

   a) Justifier que, pour $x > 0$, $x \neq 1$, $\ln x < x - 1$, puis en déduire que $K_p > 0$.

   b) Soit $h(y) = \ln y - \dfrac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - K_p$. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.

   c) Montrer que la seconde équation ci-dessus possède une unique solution r^* sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que le système a une unique solution (θ^*, r^*).

4. Écrire la hessienne $\nabla^2 F$ au point (θ^*, r^*). En déduire que L y admet un maximum local. On admet qu'il s'agit en fait d'un maximum global : le couple (θ^*, r^*) est alors une estimation de (θ, r) par maximum de vraisemblance.

3 Estimateur sans biais de l'écart-type d'une loi normale centrée

Thèmes abordés : variables à densité ; estimations.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée d'écart-type inconnu $\sigma > 0$.

1. Montrer que $T = \dfrac{X^2}{2\sigma^2}$ suit une loi $\gamma(1/2)$. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérer un n-échantillon i.i.d. $(X_1, \ldots, X_n)$ de la loi de X.

   a) Quelle est la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{X_i^2}{2\sigma^2}$?

   b) En déduire que $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ est un estimateur sans biais de σ^2.

3. a) Montrer que $\mathbb{E}(\sqrt{Y_n}) < \sigma$.

   b) Donner l'expression de $\mathbb{E}(\sqrt{Y_n})$ en fonction de n et σ.

   c) Montrer que
   $$\widehat{\sigma}_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)^{1/2}$$
   est un estimateur sans biais de σ, où λ_n a été défini dans la question I.2.d.

4. a) Calculer $\mathbb{V}(\widehat{\sigma}_n)$ en fonction de n et σ.

   b) La suite $(\widehat{\sigma}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en probabilité vers σ ?