
HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2005

Table des matières

1	Problème – Le modèle linéaire	2
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; estimations ; convergences de variables.</i>	2
	Partie I – Trace et matrices aléatoires	2
	Partie II – Le modèle linéaire	3
	Partie III – Étude d’une suite d’estimateurs	5

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

1 Problème – Le modèle linéaire

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; estimations ; convergences de variables.

Dans tout le problème, n et r désignent des entiers strictement positifs. On note $M_{n,r}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices rectangulaires à n lignes et r colonnes à coefficients réels. Pour $n = r$, on pose $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$. La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$; on pourra également la noter A^t .

On étudie quelques propriétés du modèle linéaire, instrument de base de l'économétrie.

Partie I – Trace et matrices aléatoires

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; couples de variables discrètes ; espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.

Pour toute matrice M appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace* de M , notée $\text{tr}(M)$, la somme de ses coefficients diagonaux ; ainsi, si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$,

$$\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}.$$

On rappelle les trois résultats suivants :

- l'application tr qui, à toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, associe sa trace, est une application linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$;
- si A est une matrice de $M_{n,r}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $M_{r,n}(\mathbb{R})$, alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$;
- si M et N sont deux matrices semblables de $M_n(\mathbb{R})$, alors $\text{tr}(M) = \text{tr}(N)$.

1. Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ possédant q valeurs propres ($1 \leq q \leq n$), notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$. Pour tout entier i de $\llbracket 1, q \rrbracket$, on désigne par n_i la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i .

- a. On suppose que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^q n_i \lambda_i.$$

- b. On suppose que la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $M_n(\mathbb{R})$ est symétrique. Montrer les égalités suivantes :

$$\text{tr}({}^tMM) = \text{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^q n_i \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2.$$

2. Pour tout entier i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et tout entier j de $\llbracket 1, r \rrbracket$, on considère des variables aléatoires réelles $Z_{i,j}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. On définit la matrice aléatoire Z , à

n lignes et r colonnes, en associant à tout ω de Ω la matrice

$$Z(\omega) = \begin{pmatrix} Z_{1,1}(\omega) & \cdots & Z_{1,r}(\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{n,1}(\omega) & \cdots & Z_{n,r}(\omega) \end{pmatrix} = (Z_{i,j}(\omega))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$$

On suppose que les nr variables aléatoires $Z_{i,j}$ admettent une espérance $\mathbb{E}(Z_{i,j})$, et on définit l'espérance de la matrice Z , notée $\mathbb{E}(Z)$, comme la matrice de $M_{n,r}(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les espérances $\mathbb{E}(Z_{i,j})$.

Si Z et W sont deux matrices aléatoires à n lignes et r colonnes admettant chacune une espérance, et si λ est réel, on remarquera que $\mathbb{E}(\lambda Z + W) = \lambda \mathbb{E}(Z) + \mathbb{E}(W)$. Dans le cas où $n = r$, on appelle trace de Z , notée $\text{tr}(Z)$, la variable aléatoire définie par $\text{tr}(Z) = \sum_{i=1}^n Z_{i,i}$. Si $n = r = 1$, la matrice aléatoire Z coïncide avec la variable aléatoire Z et $\text{tr}(Z) = Z$.

Dans le cas où $r = 1$ et n est quelconque, si $T = {}^t(T_1 \cdots T_n)$ et $W = {}^t(W_1 \cdots W_n)$ sont deux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^n$, et si λ est un réel quelconque, on définit le vecteur aléatoire $\lambda T + W$ de $\mathbb{R}^n$ par

$$\lambda T + W = {}^t(\lambda T_1 + W_1 \cdots \lambda T_n + W_n).$$

- Soit Z une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes admettant une espérance $\mathbb{E}(Z)$. On considère une matrice A de $M_{r,n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathbb{E}(AZ) = A\mathbb{E}(Z)$. Soit B un élément de $M_{r,q}(\mathbb{R})$, avec $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{E}(ZB) = \mathbb{E}(Z)B$.
- Soit Z une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes admettant une espérance $\mathbb{E}(Z)$. Établir les deux égalités

$$\mathbb{E}({}^tZ) = {}^t\mathbb{E}(Z) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\text{tr}(Z)) = \text{tr}(\mathbb{E}(Z)).$$

- Dans cette question, Y désigne un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$, noté $Y = {}^t(Y_1 \cdots Y_n)$, admettant une espérance $\mathbb{E}(Y)$ et une matrice de variance-covariance notée $\mathbb{V}(Y)$. On rappelle que

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))^t(Y - \mathbb{E}(Y))\right).$$

On admet que la définition et les propriétés de la matrice de variance-covariance $\mathbb{V}(Y)$ d'un vecteur aléatoire discret restent valables pour un vecteur aléatoire dont les composantes sont des variables aléatoires quelconques. Ainsi, en supposant que pour tout i et tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire $Y_i Y_j$ possède un moment d'ordre 1 au moins, on définit la covariance de Y_i et Y_j par $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}(Y_i Y_j) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j)$; si Y_i et Y_j sont indépendantes, alors $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

- Montrer que, pour tout vecteur aléatoire Y de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^t Y) - \mathbb{E}(Y)^t \mathbb{E}(Y).$$

- Soit B une matrice de $M_{r,n}(\mathbb{R})$. Justifier l'égalité $\mathbb{V}(BY) = B\mathbb{V}(Y)^t B$.
- Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On pose $m = \mathbb{E}(Y)$ et $J = \mathbb{V}(Y)$. Établir les égalités

$$\mathbb{E}({}^tYAY) = \text{tr}(A\mathbb{E}(Y^t Y)) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}({}^tYAY) = \text{tr}(AJ) + {}^t m A m.$$

Partie II – Le modèle linéaire

Thèmes abordés : suites ; fonctions de plusieurs variables ; estimations ; espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.

Dans les parties II.A et II.B, n et k sont deux entiers donnés vérifiant $1 \leq k < n$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Toutes les variables aléatoires

considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et admettent des moments d'ordre au moins 2.

On considère un échantillon de n individus extrait d'une population donnée. Ces individus sont décrits à l'aide de k variables statistiques réelles $C_1, C_2, \dots, C_k$. Pour tout entier j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, chaque caractère C_j fait l'objet de n observations notées $x_{1,j}, \dots, x_{n,j}$. On définit ainsi une application linéaire de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$, dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^n$ est la matrice $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}$ de $M_{n,k}(\mathbb{R})$. On suppose que le rang de X est égal à k .

Soit $U = {}^t(U_1 \ \dots \ U_n)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$, dont les composantes $U_1, \dots, U_n$ sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, mutuellement indépendantes et de même loi. On suppose que $\mathbb{E}(U) = 0_n$ et $\mathbb{V}(U) = \sigma^2 I_n$, où 0_n désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$, I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ et σ un réel strictement positif inconnu.

Soit $\alpha = {}^t(\alpha_1 \ \dots \ \alpha_k)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^k$ dont les composantes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont inconnues. On considère un vecteur aléatoire non nul $Y = {}^t(Y_1 \ \dots \ Y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$Y_i = \sum_{j=1}^k x_{i,j} \alpha_j + U_i.$$

Sous forme matricielle, le modèle linéaire s'écrit $Y = X\alpha + U$. On s'intéresse à quelques propriétés de ce modèle, liées à l'estimation des paramètres inconnus $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ et σ^2 .

On désigne par $y = {}^t(y_1 \ \dots \ y_n)$ le vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ qui représente la réalisation sur l'échantillon considéré du vecteur aléatoire Y ; ainsi, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, y_i est la réalisation de la variable aléatoire Y_i . Soit $u = {}^t(u_1 \ \dots \ u_n)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$, dit vecteur d'écart, défini par $u = y - X\alpha$.

A. Quelques résultats algébriques

- On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^k$ dont la matrice H , dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$, est définie par $H = {}^tXX$.
 - Montrer que H est une matrice symétrique réelle de $M_k(\mathbb{R})$.
 - En étudiant le noyau de h , montrer que le rang de h est égal à k . En déduire que la matrice H est inversible. On notera H^{-1} son inverse.
- Dans cette question, on veut trouver, en fonction de y et X , les vecteurs α de $\mathbb{R}^k$ qui minimisent $\|u\|$. Montrer que ce problème admet une unique solution $\hat{\alpha}$ définie par

$$\hat{\alpha} = H^{-1} {}^tXy.$$

- Soit p le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice X . On note P la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
 - Montrer que $p(y) = X\hat{\alpha}$. En déduire que $P = XH^{-1} {}^tX$. Vérifier que $P = P^2 = {}^tP$.
 - Établir que le rang de P et la trace de P sont égaux. Quelle est leur valeur commune?
 - Montrer que les colonnes de X constituent une base de vecteurs propres de la matrice P , associés à la valeur propre 1.
 - Montrer qu'il existe une matrice S de $M_n(\mathbb{R})$, orthogonale, telle que $P = SD {}^tS$, où $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice diagonale définie par

$$d_{i,i} = 1 \text{ si } 1 \leq i \leq k, \quad d_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

Préciser les k premières colonnes de S .

4. Soit $\hat{u}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par $\hat{u} = y - X\hat{\alpha}$.
 - a. On pose $Q = I_n - P$. Montrer que $\hat{u} = Qu$. Vérifier que $Q = Q^2 = {}^tQ$. Calculer la trace de Q .
 - b. Exprimer ${}^t\hat{u}\hat{u}$ et ${}^t_y Qy$ en fonction de Q et u .
5. Par définition, on dit qu'une matrice A symétrique réelle d'ordre n est positive si, pour tout vecteur z de $\mathbb{R}^n$, on a ${}^t zAz \geq 0$.
 - a. Montrer que A , symétrique réelle, est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles.
 - b. Soit L une matrice appartenant à $M_{n,k}(\mathbb{R})$. Établir que ${}^t LL$ est symétrique réelle positive.

B. Estimation des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ et σ^2

1. Soit $\hat{G}$ le vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^k$ défini par $\hat{G} = H^{-1}{}^tXY$.
 - a. Établir que $\mathbb{E}(Y) = X\alpha$ et que $\mathbb{V}(Y) = \sigma^2 I_n$. En déduire que $\mathbb{E}(\hat{G}) = \alpha$ ($\hat{G}$ est un estimateur sans biais de α , tandis que $\hat{\alpha}$ est une estimation sans biais de α).
 - b. Montrer que $\mathbb{V}(\hat{G}) = \sigma^2 H^{-1}$.
2. On veut montrer dans cette question que, dans l'ensemble des estimateurs sans biais du paramètre α de la forme ${}^tBY$, où B est une matrice quelconque, non nulle, de $M_{n,k}(\mathbb{R})$, l'estimateur $\hat{G}$ est optimal au sens suivant : tout autre estimateur G^* sans biais du paramètre α , de la forme ${}^tBY$, est tel que la matrice $\mathbb{V}(G^*) - \mathbb{V}(\hat{G})$ est positive.
Soit B une matrice non nulle de $M_{n,k}(\mathbb{R})$. On considère le vecteur aléatoire $\hat{C} = {}^tBY$.
 - a. Quelle condition doit satisfaire la matrice B pour que, pour tout vecteur α de $\mathbb{R}^k$, $\hat{C}$ soit un estimateur sans biais de α ?
 - b. En supposant cette condition vérifiée, on pose ${}^tF = {}^tB - H^{-1}{}^tX$. Calculer ${}^tFX$, et montrer que la matrice $\mathbb{V}(\hat{C}) - \mathbb{V}(\hat{G})$ est positive.
3. On désigne par $\hat{U}$ le vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ défini par $\hat{U} = Y - X\hat{G}$.
 - a. Montrer que $\hat{U} = QU$.
 - b. Déterminer $\mathbb{E}(\hat{U})$ et $\mathbb{V}(\hat{U})$. Les variables aléatoires $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$ sont-elles indépendantes?
 - c. Montrer que

$${}^t\hat{U}\hat{U} = \sum_{i=1}^n \hat{U}_i^2 = {}^tUQU = {}^tYQY.$$

- d. Calculer $\mathbb{E}({}^t\hat{U}\hat{U})$. En déduire que la variable aléatoire s_n définie par

$$s_n = \frac{{}^t\hat{U}\hat{U}}{n-k} = \frac{{}^tYQY}{n-k}$$

est un estimateur sans biais de σ^2 .

Partie III – Étude d'une suite d'estimateurs

Thèmes abordés : suites ; estimations.

Dans cette partie, k est fixé dans $\mathbb{N}^*$. On veut montrer que la suite d'estimateurs $(s_n)_{n \geq k+1}$ de σ^2 est convergente. On suppose que, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire U_i possède des moments d'ordre 3 et 4 avec $\mathbb{E}(U_i^3) = 0$ et $\mathbb{E}(U_i^4) = 3\sigma^4$. On pose $Q = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Établir que

$${}^tUQU = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{i,j} U_i U_j.$$

2. Montrer que

$$\mathbb{E} \left(({}^tUQU)^2 \right) = \sigma^4 \left(\operatorname{tr}(Q)^2 + 2 \operatorname{tr}(Q^2) \right).$$

En déduire que $\mathbb{E} \left(({}^tUQU)^2 \right) = \sigma^4(n-k)(n-k+2)$.

3. Calculer la variance $\mathbb{V}(s_n)$ de la variable aléatoire s_n . Conclure.