HEC Paris – ESCP-EAP – EM Lyon

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2006

Table des matières

1 Préliminaire **2**

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; variables à densité ; Python. 2

2 Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de H_n **3**

Thèmes abordés : intégrales ; réduction ; algèbre bilinéaire. 3

3 Croissance et convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ **3**

Thèmes abordés : suites ; intégrales ; algèbre bilinéaire. 3

4 Limite de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ **4**

Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales ; algèbre bilinéaire. 4

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Pour tout couple (p, q) d'entiers strictement positifs, $M_{p,q}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Si $A \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, sa transposée est notée ${}^tA$.

Dans tout le problème, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on identifie $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique : le produit scalaire de X et Y est noté $\langle X, Y\rangle = {}^tYX$. Pour $X = {}^t(x_0, \ldots, x_{n-1})$, on pose $\|X\| = ({}^tXX)^{1/2}$.

L'objet du problème est l'étude de certaines propriétés de la matrice de Hilbert

$$H_n = \left(h_{k,j}^{(n)}\right)_{1\leq k,j\leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R}), \qquad h_{k,j}^{(n)} = \frac{1}{k+j-1}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

1 Préliminaire

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; variables à densité ; Python.

On rappelle que la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque, notée arctan.

1. a) Pour tout réel x, rappeler l'expression de $(\arctan)'(x)$ en fonction de x.

   b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

   c) Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \arctan x \leq x$.

2. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

   a) Montrer que ψ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

   b) Soit U une variable aléatoire réelle de densité ψ et F sa fonction de répartition. Déterminer la loi de $F(U)$.

   c) La fonction `random.random()` du module `random` renvoie une réalisation d'une loi uniforme sur $[0, 1[$. Écrire une fonction Python `cauchy()` qui simule la variable aléatoire U.

```python
import math
import random

def cauchy():
    u = random.random()
    return math.tan(math.pi * (u - 0.5))
```

2 Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de H_n

Thèmes abordés : intégrales ; réduction ; algèbre bilinéaire.

1. Calculer, pour tout $(k,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{k+j-2}\,dt$. En déduire que, pour tout $X = {}^t(x_0,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$,
$$ {}^tXH_nX = \int_0^1 \left(x_0 + x_1t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1}\right)^2 dt.$$
2. a) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs et d'une matrice orthogonale P telles que $H_n = PD{}^tP$.
   b) On désigne par α_n et β_n les plus petite et plus grande valeurs propres de H_n. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,
$$\alpha_n\|X\|^2 \leq {}^tXH_nX \leq \beta_n\|X\|^2.$$
3. On note V le sous-espace propre de H_n associé à la valeur propre β_n.
   a) Soit $Y \in V$. Montrer que ${}^tYH_nY = \beta_n\|Y\|^2$.
   b) Réciproquement, soit $Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vérifiant ${}^tYH_nY = \beta_n\|Y\|^2$. Montrer que $Y \in V$.
4. Soit $X_0 = {}^t(x_0,\dots,x_{n-1})$ un vecteur non nul de V. On note $|X_0| = {}^t(|x_0|,\dots,|x_{n-1}|)$.
   a) Établir l'inégalité ${}^t|X_0|H_n|X_0| \geq {}^tX_0H_nX_0$.
   b) En déduire que $|X_0| \in V$.
   c) Montrer que les composantes de $H_n|X_0|$ sont toutes strictement positives. En déduire que X_0 n'a aucune composante nulle.
   d) En utilisant l'égalité ${}^tX_0H_nX_0 = {}^t|X_0|H_n|X_0|$, montrer que les composantes de X_0 sont toutes de même signe.
5. a) Montrer qu'il n'existe pas deux vecteurs non nuls de V qui soient orthogonaux.
   b) En déduire la dimension du sous-espace propre V.

3 Croissance et convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$

Thèmes abordés : suites ; intégrales ; algèbre bilinéaire.

On rappelle que β_n désigne la plus grande valeur propre de H_n.

1. Soit $X' = {}^t(x'_0,\dots,x'_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de H_n associé à β_n, et soit $Z = {}^t(x'_0,\dots,x'_{n-1},0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que ${}^tZH_{n+1}Z = {}^tX'H_nX'$. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
2. **Résultat admis (adaptation au programme).** Pour tout polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x_kx^k$ à coefficients réels, on admet l'inégalité
$$\left|\int_{-1}^1 P(x)\,dx\right| \leq \int_0^\pi \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k\cos(k\theta)\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k\sin(k\theta)\right)^2\right] d\theta.$$

3. Dans les deux questions suivantes, $X = {}^t(x_0, \dots, x_{n-1})$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.
   a) Établir l'encadrement
   $$0 \leq {}^t X H_n X \leq \int_{-1}^{1} \left(x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1} t^{n-1}\right)^2 dt.$$
   b) En déduire que
   $$0 \leq {}^t X H_n X \leq \int_0^{\pi} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cos(k\theta)\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k \sin(k\theta)\right)^2\right] d\theta.$$

4. a) Soit $\varphi(\theta) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cos(k\theta)\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k \sin(k\theta)\right)^2$. Montrer que φ est 2π-périodique et paire ; en déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\, d\theta$.
   b) Établir l'inégalité ${}^t X H_n X \leq \pi \|X\|^2$.
   c) En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est majorée, puis qu'elle est convergente.

4 Limite de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$

Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales ; algèbre bilinéaire.

Dans cette partie, on considère le vecteur $W = {}^t(1, 1/\sqrt{2}, \dots, 1/\sqrt{n}) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer les égalités
   $${}^t W H_n W = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kj}(k+j-1)} = \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 dt.$$

2. En déduire que, pour $n \geq 2$,
   $${}^t W H_n W > \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}}.$$

   Dans les questions suivantes, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.

3. a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0, p[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(p-x)}}$.
   b) En déduire, quelle que soit la parité de p, l'inégalité
   $$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} > \int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}.$$

4. Justifier la validité du changement de variable $x = \dfrac{p}{1+t^2}$ dans l'intégrale précédente et établir
   $$\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}} = \pi - 4\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right).$$

5. On pose $u_p = \dfrac{1}{p-1}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$. Montrer que la série de terme général u_p est convergente.

6. a) Montrer que $\|W\|^2 \sim \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   b) En déduire la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$.