

# HEC Paris – ESCP Europe

## Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2006

---

### Table des matières

---

|          |                                                                              |          |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Partie I. Polynôme du second degré à coefficients aléatoires</b>          | <b>2</b> |
|          | Thèmes abordés : probabilités ; variables à densité ; convolution. . . . .   | 2        |
| <b>2</b> | <b>Partie II. Suites de Sturm</b>                                            | <b>3</b> |
|          | Thèmes abordés : polynômes ; variations ; algorithmique. . . . .             | 3        |
| <b>3</b> | <b>Partie III. Un majorant du nombre de racines réelles</b>                  | <b>4</b> |
|          | Thèmes abordés : Rolle ; polynôme réciproque ; optimisation. . . . .         | 4        |
| <b>4</b> | <b>Partie IV. Polynôme de degré <math>n</math> à coefficients aléatoires</b> | <b>6</b> |
|          | Thèmes abordés : loi de Poisson ; concavité ; espérance. . . . .             | 6        |

# 1 Partie I. Polynôme du second degré à coefficients aléatoires

Thèmes abordés : probabilités ; variables à densité ; convolution.

1. Le discriminant  $\Delta = X_1^2 - 4X_0$  est une variable aléatoire et

$$[M = 0] = [\Delta < 0], \quad [M = 1] = [\Delta = 0], \quad [M = 2] = [\Delta > 0].$$

Ces trois événements sont mesurables ; ainsi  $M$  est une variable aléatoire.

2. a)  $X_0 = 2Z - 1$  prend les valeurs  $-1$  et  $1$ , avec

$$\mathbb{P}(X_0 = -1) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(X_0 = 1) = p.$$

- b) Ici  $X_1^2 = 1$  et  $\Delta = 1 - 4X_0$ . Donc

$$\mathbb{P}(M = 0) = p, \quad \mathbb{P}(M = 2) = 1 - p, \quad \mathbb{E}(M) = 2(1 - p).$$

3. Comme  $X_1 \geq 0$ ,

$$F_{Y_1}(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq \sqrt{x}) = 1 - e^{-\sqrt{x}/2} \quad (x > 0),$$

et  $F_{Y_1}(x) = 0$  pour  $x \leq 0$ . De même,

$$F_{Y_0}(x) = \mathbb{P}(X_0 \geq -x/4) = \begin{cases} e^{x/8}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Ces fonctions sont continues et de classe  $\mathcal{C}^1$  hors de 0. On peut choisir

$$f_{Y_1}(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}/2}}{4\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x), \quad f_{Y_0}(x) = \frac{1}{8} e^{x/8} \mathbf{1}_{]-\infty, 0[}(x).$$

4. a) Au voisinage de 0,  $g(t) \sim t^{-1/2}$ , dont l'intégrale converge. À l'infini,

$$t^2 g(t) = t^{3/2} e^{-t/8} e^{-\sqrt{t}/2} \longrightarrow 0.$$

Donc  $g(t) = o(t^{-2})$ . Ainsi

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt \text{ converge.}$$

- b)  $Y_0$  et  $Y_1$  sont indépendantes. Par convolution,

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(t) f_{Y_0}(x - t) dt.$$

Les deux facteurs sont non nuls lorsque  $t > 0$  et  $t > x$ . Il en résulte

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(t) dt, & x < 0, \\ \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(t) dt, & x \geq 0. \end{cases}$$

5. a) La fonction  $t \mapsto \sqrt{t}$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $]0, +\infty[$  sur lui-même ; le changement de variable est donc valable sur toute intégrale tronquée, puis par passage à la limite.

- b) En posant  $u = \sqrt{t}$ , puis  $v = u/2 + 1$ ,

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2/8 - u/2} du = \boxed{4\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv}.$$

Ainsi, pour  $x < 0$ ,

$$\boxed{f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8}(1 - \Phi(1))e^{x/8}}.$$

- c) Les mêmes changements de variable, avec borne inférieure  $\sqrt{x}$ , donnent, pour  $x > 0$ ,

$$\boxed{f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8}e^{x/8} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right) \right]}.$$

- d) Comme  $Y$  a une densité,  $\mathbb{P}(M = 1) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0$ . En outre,

$$\mathbb{P}(M = 0) = \int_{-\infty}^0 f_Y(x)dx = \sqrt{2\pi e}(1 - \Phi(1)).$$

Par conséquent

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}(M = 0) &= \sqrt{2\pi e}(1 - \Phi(1)), \\ \mathbb{P}(M = 2) &= 1 - \sqrt{2\pi e}(1 - \Phi(1)), \\ \mathbb{E}(M) &= 2 - 2\sqrt{2\pi e}(1 - \Phi(1)). \end{aligned}}$$

## 2 Partie II. Suites de Sturm

*Thèmes abordés : polynômes ; variations ; algorithmique.*

1. Tant que  $R_j$  et  $R_{j+1}$  sont non nuls, la division euclidienne impose  $\deg R_{j+2} < \deg R_{j+1}$ . Une suite strictement décroissante d'entiers naturels ne peut être infinie. Il existe donc  $\boxed{k > 2 \text{ tel que } R_k = 0}$ .

2. a) Si  $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$ , la relation  $R_{j-1} = S_j R_j - R_{j+1}$  donne  $R_{j-1}(x_0) = 0$ . En remontant,

$$\boxed{R_0(x_0) = R_1(x_0) = 0, \text{ soit } P(x_0) = P'(x_0) = 0}.$$

- b) Si  $R_m(x_0) = 0$ , alors  $R_{m-1}(x_0) = S_m(x_0)R_m(x_0) = 0$ , ce qui contredit la simplicité des racines de  $P$ . Donc  $\boxed{R_m \text{ n'a aucune racine réelle}}$ .

- c) Si  $R_j(x_0) = 0$ , alors  $R_{j-1}(x_0) = -R_{j+1}(x_0)$ . Aucun de ces deux nombres n'est nul d'après a), d'où

$$\boxed{R_{j-1}(x_0)R_{j+1}(x_0) < 0}.$$

3. a) La racine  $x_0$  est simple, donc  $P'(x_0) \neq 0$ . Au voisinage de  $x_0$ ,  $P'$  garde son signe et  $P$  change de signe. Comme  $R_1 = -P'$ , le couple  $(P, -P')$  ne présente aucun changement à gauche de  $x_0$  et un changement à droite. Ainsi

$$\boxed{C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1}$$

pour  $h > 0$  assez petit.

- b) Si aucun  $R_j$ ,  $j \geq 1$ , ne s'annule en  $x_0$ , tous gardent leur signe localement et  $C_2$  reste constant. Si  $R_j(x_0) = 0$ , ses voisins sont non nuls et de signes opposés d'après 2.c) ; que  $R_j$  change de signe ou non, la sous-liste  $(R_{j-1}, R_j, R_{j+1})$  conserve exactement un changement de signe. En choisissant un voisinage sans autre racine,

$$C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h).$$

- c) Pour  $h$  assez petit,  $R_1$  ne s'annule pas, donc  $C = C_1 + C_2$ . Les deux questions précédentes donnent

$$C(x_0 + h) - C(x_0 - h) = 1.$$

Entre deux zéros de la suite de Sturm, tous les signes sont constants. À un zéro d'un  $R_j$  avec  $j \geq 1$ , le nombre  $C$  ne change pas ; à chaque zéro de  $P$ , il augmente de 1. En découpant  $[a, b]$  en tels intervalles,

$$\#\{\text{racines de } P \text{ dans } [a, b]\} = C(b) - C(a).$$

4. a) Si  $P(\alpha) = 0$  et  $|\alpha| > 1$ ,

$$|\alpha|^n = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\alpha|^k \leq |\alpha|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

Après division,  $|\alpha| \leq \sum |a_k|$  ; si  $|\alpha| \leq 1$ , la conclusion est immédiate. Donc

$$|\alpha| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

- b) On calcule la suite de Sturm par divisions euclidiennes jusqu'au dernier reste non nul. On pose  $B = 2 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ , de sorte que  $\pm B$  ne sont pas racines de  $P$ , puis on renvoie  $C(B) - C(-B)$ .

5. On mémorise seulement le dernier terme non nul et on incrémente le compteur lorsque son produit avec le nouveau terme non nul est négatif :

```
def nbchgs(T):
    precedent = 0
    nombre = 0
    for terme in T:
        if terme != 0:
            if precedent * terme < 0:
                nombre += 1
            precedent = terme
    return nombre
```

### 3 Partie III. Un majorant du nombre de racines réelles

*Thèmes abordés : Rolle ; polynôme réciproque ; optimisation.*

1. a) Sur chacune des deux demi-droites  $] -\infty, -1]$  et  $[1, +\infty[$ , le théorème de Rolle fournit une racine de  $P'$  entre deux racines distinctes de  $P$  ; une racine multiple d'ordre  $r$  devient racine d'ordre  $r - 1$  de  $P'$ . Au total,

$$N_1(P) \leq N_1(T(P)) + 2.$$

- b) En appliquant l'inégalité précédente successivement à  $P, T(P), \dots, T^{k-1}(P)$ ,

$$\boxed{N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k}.$$

2. a) Un calcul direct donne, pour  $x \neq 0$ ,

$$\boxed{P^*(x) = x^n P(1/x)}.$$

- b) L'application  $x \mapsto 1/x$  met en bijection, en conservant les multiplicités, les racines de  $P$  dans  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$  et les racines non nulles de  $P^*$  dans  $[-1, 1]$ . Donc

$$\boxed{N_1(P) = N_0(P^*)}.$$

3. Puisque  $T(X^j) = jX^j$ ,

$$T^k(P) = n^k X^n + a_{n-1}(n-1)^k X^{n-1} + \dots + a_1 X.$$

En prenant le réciproque et en factorisant  $n^k$ ,

$$\boxed{(T^k(P))^* = n^k Q_k}.$$

4. a) La fonction  $y \mapsto (1-y)e^y$  a pour dérivée  $-ye^y \leq 0$  sur  $[0, 1]$  et vaut 1 en 0. Donc

$$\boxed{(1-y)e^y \leq 1}.$$

- b) Le résultat intermédiaire admis donne directement

$$\boxed{N_1(P) \leq 2k + \frac{n}{k} \ln L(P)}.$$

- c) i)  $\psi'(x) = 2 - \theta/x^2$ . La fonction décroît sur  $]0, \sqrt{\theta/2}]$ , puis croît sur  $[\sqrt{\theta/2}, +\infty[$ ; son minimum vaut  $2\sqrt{2\theta}$ .

- ii) Comme  $\theta/(\sqrt{\theta/2} + 1) \leq \sqrt{2\theta}$ ,

$$\boxed{\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta}}.$$

- iii) Prenons  $\theta = n \ln L(P)$  et  $k = \lceil \sqrt{\theta/2} \rceil$ . Alors

$$N_1(P) \leq \psi(k) \leq \psi(\sqrt{\theta/2} + 1),$$

d'où

$$\boxed{N_1(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln L(P)}}.$$

- d) Si  $a_0 \neq 0$ , aucune racine n'est nulle et  $N(P) \leq N_0(P) + N_1(P)$ ; les racines  $\pm 1$  peuvent seulement être comptées deux fois dans le majorant. Ainsi

$$\boxed{N(P) \leq 4 + 2\sqrt{2n \ln L(P)} + 2\sqrt{2n \ln \left( \frac{L(P)}{|a_0|} \right)}}.$$

## 4 Partie IV. Polynôme de degré $n$ à coefficients aléatoires

Thèmes abordés : loi de Poisson ; concavité ; espérance.

1. Par stabilité de la loi de Poisson,

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i \sim \mathcal{P}((n-1)\lambda).$$

2. Pour  $Q_\omega$ , le coefficient constant vaut 1 et  $L(Q_\omega) = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\omega) = Z_n(\omega) + 2$ . Les deux logarithmes du majorant précédent sont donc égaux. Le nombre de racines sans multiplicité est inférieur à celui avec multiplicités, d'où

$$M_n \leq 4 + 4\sqrt{2n}\sqrt{\ln(Z_n + 2)}.$$

3. a) Une fonction concave est située sous chacune de ses tangentes :

$$h(x) \leq h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0).$$

- b) On prend  $x_0 = \mathbb{E}(W)$  puis l'espérance ; le terme affine centré a une espérance nulle. Ainsi

$$\mathbb{E}(h(W)) \leq h(\mathbb{E}(W)).$$

4. a) On a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}.$$

Le dénominateur est strictement croissant sur  $\mathbb{R}_+$  ;  $\varphi'$  est donc décroissante. Par conséquent,

$$\varphi \text{ est concave.}$$

- b) La concavité donne, pour  $k \geq 0$ ,  $\varphi(k) \leq \varphi(0) + k\varphi'(0)$ . Donc

$$0 \leq \varphi(k) \frac{a^k}{k!} \leq \varphi(0) \frac{a^k}{k!} + \varphi'(0) a \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Les deux séries exponentielles convergent ; par comparaison,

$$\sum_{k \geq 0} \sqrt{\ln(k+2)} \frac{a^k}{k!} \text{ converge.}$$

5. a) Le théorème de transfert et la question 4.b), avec  $a = (n-1)\lambda$ , montrent que  $\mathbb{E}(\sqrt{\ln(Z_n + 2)})$  existe. Le majorant positif de la question 2 implique alors

$$\mathbb{E}(M_n) \text{ existe.}$$

- b) Par l'inégalité de Jensen et  $\mathbb{E}(Z_n) = (n-1)\lambda$ ,

$$0 \leq \mathbb{E}(M_n) \leq 4 + 4\sqrt{2n}\sqrt{\ln((n-1)\lambda + 2)}.$$

Si  $\beta > 1/2$ , alors  $n^{1/2-\beta}\sqrt{\ln((n-1)\lambda + 2)} \rightarrow 0$ . Le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(M_n)}{n^\beta} = 0.$$