

HEC Paris – ESCP Europe – EM Lyon

Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2006

Table des matières

1	Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires	2
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; variables à densité ; intégrales généralisées. . .</i>	2
2	Suites de Sturm	3
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; Python.</i>	3
3	Un majorant du nombre de racines réelles de P	4
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites.</i>	4
4	Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires	5
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; fonctions d'une variable ; séries.</i>	5

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n , avec $n > 1$, à coefficients réels fixes ou aléatoires. Dans les parties II et III, les polynômes considérés sont à coefficients réels et l'on pourra confondre un polynôme et la fonction polynomiale associée. Pour toute fonction dérivable sur son domaine de définition, sa dérivée est notée f' . Les quatre parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

1 Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; variables à densité ; intégrales généralisées.

On considère deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 , définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi. Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère le polynôme Q_ω , d'indéterminée y , défini par

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega).$$

On désigne par $M(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω .

1. Montrer que l'application M , qui à tout $\omega \in \Omega$ associe $M(\omega)$, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p , où $p \in]0, 1[$. On suppose dans cette question que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z - 1$.
 - a) Déterminer la loi de X_0 .
 - b) Déterminer la loi de M et calculer son espérance $\mathbb{E}(M)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 et X_1 suivent une même loi exponentielle de paramètre $1/2$. On pose

$$Y_0 = -4X_0, \quad Y_1 = X_1^2, \quad Y = Y_1 + Y_0,$$

et l'on note F_{Y_0} , F_{Y_1} et F_Y les fonctions de répartition respectives de Y_0 , Y_1 et Y .

3. Montrer que, pour tout réel x ,

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ e^{x/8} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1 .

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{4} + \sqrt{t} \right) \right].$$

- a) Établir la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} g(t) dt$.

- b) En déduire qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout réel x , par

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

5. On désigne par Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

- a) Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} g(t) dt$.

- b) En déduire que $\int_0^{+\infty} g(t) dt = 4\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$, puis donner, pour tout réel $x < 0$, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ .

- c) Montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right) \right].$$

- d) Déterminer la loi de M et son espérance $\mathbb{E}(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

2 Suites de Sturm

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; Python.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme réel unitaire. On suppose que toutes les racines réelles de P sont simples. L'objectif de cette partie est de décrire un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P appartenant à un intervalle donné $[a, b]$.

On associe au polynôme P la suite $(R_i)_{i \geq 0}$ de polynômes définie par $R_0 = P$, $R_1 = -P'$, et, pour tout entier j tel que $R_{j+1} \neq 0$, R_{j+2} est l'opposé du reste de la division euclidienne de R_j par R_{j+1} . Si $R_{j+1} = 0$, on pose $R_{j+2} = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier $k > 2$ tel que $R_k = 0$. On note R_m , avec $m > 1$, le dernier polynôme non nul de la suite $(R_i)_{i \geq 0}$.

Dans toute cette partie, on pose

$$\begin{aligned} R_0 &= S_1 R_1 - R_2, & R_1 &= S_2 R_2 - R_3, & \dots, \\ R_{m-2} &= S_{m-1} R_{m-1} - R_m, & R_{m-1} &= S_m R_m. \end{aligned}$$

2. a) Montrer que s'il existe un entier $j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ et un réel x_0 tels que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$, alors $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.
- b) En déduire que le polynôme R_m n'admet pas de racine réelle.
- c) Soit $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$. Montrer que, si x_0 est une racine réelle de R_j , alors $R_{j-1}(x_0)R_{j+1}(x_0) < 0$.

3. Soit $s = (s_1, s_2, \dots, s_t)$ une t -liste, avec $t > 2$, de nombres réels non tous nuls. On ôte de s tous les éléments nuls en préservant l'ordre et l'on obtient une p -liste, avec $p \leq t$, notée $\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_p)$. On appelle *nombre de changements de signe* de s le nombre d'éléments de l'ensemble

$$E = \{i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \mid \hat{s}_i \hat{s}_{i+1} < 0\}.$$

Si $p = 1$, ce nombre est nul. Par exemple, pour $s = (0, 3, 0, 5, -3, 2)$, on a $\hat{s} = (3, 5, -3, 2)$ et le nombre de changements de signe est égal à 2.

Pour tout réel x , on note respectivement $C_1(x)$, $C_2(x)$ et $C(x)$ le nombre de changements de signe du couple $(R_0(x), R_1(x))$, de la m -liste $(R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x))$ et de la $(m+1)$ -liste $(R_0(x), R_1(x), \dots, R_m(x))$. On désigne par x_0 une racine réelle de P .

- a) En étudiant les variations de P au voisinage de x_0 , montrer qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_1[$, alors $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$.
 - b) À l'aide de la question 2.c, montrer qu'il existe $\delta_2 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_2[$, alors $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$. On distinguera les deux éventualités : soit x_0 n'est racine d'aucun des polynômes $R_1, \dots, R_m$, soit il existe $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ tel que $R_j(x_0) = 0$.
 - c) Dédire des deux questions précédentes que, pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et $h \in]0, \delta[$, on a $C(x_0 + h) - C(x_0 - h) = 1$, et que si a et b ne sont pas racines de P et vérifient $a < b$, alors le nombre de racines réelles de P dans $[a, b]$ est égal à $C(b) - C(a)$.
4. a) Montrer que, pour toute racine réelle α de P telle que $|\alpha| > 1$,

$$|\alpha|^n \leq |\alpha|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

En déduire que toute racine réelle α de P vérifie $|\alpha| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

- b) Écrire en français un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P .
5. Écrire une fonction Python `nbchgs(T)` qui donne le nombre de changements de signe dans la liste de réels T . On tiendra compte du fait que la liste peut contenir des éléments nuls. La fonction n'utilisera aucune autre liste auxiliaire. Expliquer en français la démarche utilisée.

```

1 def nbchgs(T):
2     """Number of sign changes after removing zeros."""
3     precedent = 0
4     nombre = 0
5     for terme in T:
6         if terme != 0:
7             if precedent * terme < 0:
8                 nombre += 1
9             precedent = terme
10    return nombre

```

3 Un majorant du nombre de racines réelles de P

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites.

Soit V un polynôme réel tel que $V(X) = v_m X^m + v_{m-1} X^{m-1} + \dots + v_1 X + v_0$. On note V^* le polynôme réciproque de V , défini par

$$V^*(X) = v_0 X^m + v_1 X^{m-1} + \dots + v_{m-1} X + v_m.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application T qui, à tout polynôme réel unitaire P de degré n , $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$, associe le polynôme $T(P)$ défini par $T(P)(X) = XP'(X)$. On désigne par $N_0(P)$ le nombre de racines non nulles de P dans $[-1, 1]$, comptées avec leurs ordres de multiplicité, par $N_1(P)$ le nombre de racines de P dans $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, comptées avec leurs ordres de multiplicité, et par $N(P)$ le nombre de racines réelles de P , comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1. a) Établir, à l'aide du théorème de Rolle, l'inégalité $N_1(P) \leq N_1(T(P)) + 2$.
 b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$ (k fois). Montrer que $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$.
2. a) Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$, $P^*(x) = x^n P(1/x)$.
 b) Montrer que $N_1(P) = N_0(P^*)$.
3. Pour tout réel x et tout entier $k \geq 1$, on pose

$$Q_k(x) = 1 + a_{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k x + a_{n-2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k x^2 + \dots + a_1 \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k x^{n-1}.$$

Montrer que $(T^k(P))^* = n^k Q_k$.

4. a) Établir, pour tout réel $y \in [0, 1]$, l'inégalité $(1 - y)e^y \leq 1$.
 b) *Le résultat intermédiaire de l'énoncé d'origine reposant sur les nombres complexes, il est admis dans cette adaptation que les questions précédentes permettent d'obtenir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$N_1(P) \leq 2k + \frac{n}{k} \ln(L(P)), \quad \text{où} \quad L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$

- c) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\psi(x) = 2x + \frac{\theta}{x}$, où θ est un paramètre réel strictement positif.
 - i) Étudier les variations de ψ .
 - ii) Montrer que $\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta}$.
 - iii) En déduire l'inégalité $N_1(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln(L(P))}$.
- d) En supposant $a_0 \neq 0$, on démontrerait de même, et l'on admettra dans la suite du problème, que

$$N_0(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln \left(\frac{L(P)}{|a_0|} \right)}.$$

Conclure en donnant un majorant de $N(P)$ fonction des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

4 Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; fonctions d'une variable ; séries.

Pour $n \geq 2$, on considère les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère le polynôme Q_ω , d'indéterminée y , défini par

$$Q_\omega(y) = y^n + X_{n-1}(\omega)y^{n-1} + \dots + X_1(\omega)y + 1.$$

Soit $M_n(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω . On admet que l'application $M_n : \omega \mapsto M_n(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On définit la variable aléatoire L_n par $L_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Soit $Z_n = L_n - 2$. Rappeler la loi de Z_n .
2. À l'aide des résultats de la partie III, montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M_n(\omega) \leq 4 + 4\sqrt{2n} \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}.$$

3. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, concave sur $\mathbb{R}_+$. Soit W une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les espérances $\mathbb{E}(W)$ et $\mathbb{E}(h(W))$ existent.
 - a) Montrer que, pour tout couple (x_0, x) de réels positifs, $h(x) \leq h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$.
 - b) En prenant $x_0 = \mathbb{E}(W)$, établir l'inégalité $\mathbb{E}(h(W)) \leq h(\mathbb{E}(W))$.
4. a) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.
 - b) Soit $a \geq 0$. Montrer que la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)} \frac{a^k}{k!}$ est convergente.
5. a) Prouver l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(M_n)$.
 - b) Montrer que, pour tout réel $\beta > 1/2$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(M_n)}{n^\beta} = 0$.