HEC Paris – ESCP-EAP – EM Lyon

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2007

Table des matières

1 Préliminaires **2**

Thèmes abordés : espaces vectoriels. 2

2 Norme matricielle et exponentielle de matrices **2**

Thèmes abordés : séries ; espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires. 2

3 Produits matriciels et approximation **4**

Thèmes abordés : séries ; espaces vectoriels ; applications linéaires. 4

4 Approximation d'une loi de Poisson **5**

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; séries ; Python. 5

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I la matrice identité, et $M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne. On identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.

1 Préliminaires

Thèmes abordés : espaces vectoriels.

Soit E un espace vectoriel réel. On appelle *norme* sur E toute application ν de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

i. $\nu(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;

ii. pour tout réel λ et tout $x \in E$, $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$;

iii. pour tout $(x, y) \in E^2$, $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$.

Montrer que l'application $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ définie, pour tout vecteur $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, par

$$\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2 Norme matricielle et exponentielle de matrices

Thèmes abordés : séries ; espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.

A. Une norme sur $M_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que l'application qui, à toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$, associe le réel

$$\|A\| = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. a) Établir, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité $\|AX\|_\infty \leq \|A\| \, \|X\|_\infty$.

   b) Montrer qu'il existe un vecteur non nul $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|AX_0\|_\infty = \|A\| \, \|X_0\|_\infty$. En déduire que

$$\|A\| = \sup_{X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}.$$

   c) Établir alors que, pour tout $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, on a $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

On dit qu'une suite $(A_m)_{m\geq 0}$ de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A lorsque $\lim_{m\to+\infty}\|A_m - A\| = 0$. On pose $A_m = (a_{i,j}(m))_{1\leq i,j\leq n}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

3. a) Montrer que $(A_m)_{m\geq 0}$ converge vers A si et seulement si, pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$, $\lim_{m\to+\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}$.

   b) Montrer que si $(A_m)_{m\geq 0}$ converge vers A et $(B_m)_{m\geq 0}$ converge vers B, alors $(A_mB_m)_{m\geq 0}$ converge vers AB.

4. Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\|A\|<1$.

   a) Déterminer $\lim_{m\to+\infty} A^m$.

   b) Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A, alors $|\lambda|<1$. En déduire que les matrices $I-A$ et $I+A$ sont inversibles.

   c) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^m A^k\right)_m$ converge et exprimer sa limite en fonction de A.

Soit $(A_m)_{m\geq 0}$ une suite de matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On dit que la série de terme général A_m, notée $\sum_{m\geq 0} A_m$, converge si la suite $(\sum_{m=0}^p A_m)_p$ converge. Sa limite est alors notée $\sum_{m=0}^{+\infty} A_m$.

5. On considère une matrice non nulle $N\in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant : il existe un entier $p\geq 2$ tel que $N^p=0$ et $N^{p-1}\neq 0$.

   a) Montrer que la série $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}N^k$ converge. On note $M=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}N^k$.

   b) Montrer que $\{X\in\mathbb{R}^n \mid (M-I)X=0\} = \{X\in\mathbb{R}^n \mid NX=0\}$.

6. a) Soit D une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}D^k$ converge.

   b) Soit A une matrice diagonalisable, D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $A=PDP^{-1}$. Montrer que la série $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}A^k$ converge et exprimer sa somme en fonction de P et de $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}D^k$.

On admet jusqu'à la fin du problème que, pour toute matrice $A\in M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}A^k$ converge. On note

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k.$$

7. Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, on pose $A_m = \left(I+\frac{1}{m}A\right)^m$.

   a) Établir l'inégalité

$$\left\|\sum_{k=0}^m\frac{1}{k!}A^k - A_m\right\| \leq \sum_{k=0}^m\left(1-\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\right)\frac{\|A\|^k}{k!}.$$

   b) En déduire que la suite $(A_m)_m$ converge vers $\exp(A)$.

B. Propriétés de l'exponentielle de matrice

On admet que, si A et B sont des éléments de $M_n(\mathbb{R})$ tels que $AB=BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

1. Montrer que, pour toute matrice $A\in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $\exp(A)$ est inversible et déterminer son inverse.

2. a) Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice S_A telle que $\exp(A)-I = A(I+S_A)$.

   b) Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x\mapsto e^x-1-2x$.

   c) En déduire que si $\|A\|<1$, alors $\|S_A\|<1$.

d) On suppose que $\|A\| < 1$ et que $\exp(A) = I$. Montrer que A est la matrice nulle.

3. On note S_n l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n, et S_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n dont les valeurs propres sont strictement positives.

   a) Montrer que si $A \in S_n$, alors $\exp(A) \in S_n^{++}$.

   b) Montrer que l'application exp, restreinte à S_n, est une surjection de S_n sur S_n^{++}.

4. Soient A et B deux matrices de S_n telles que $\exp(A) = \exp(B)$. On note u (respectivement v) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A (respectivement B), et $\exp(u)$ (respectivement $\exp(v)$) l'endomorphisme canoniquement associé à $\exp(A)$ (respectivement $\exp(B)$).

   a) Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres.

   b) Montrer que $A\exp(B) = \exp(B)A$.

   c) Soit F un sous-espace propre de v.

      i. Montrer que F est également un sous-espace propre de $\exp(v)$.

      ii. Montrer que la restriction de u à F induit un endomorphisme diagonalisable de F.

   d) En se plaçant dans une base de diagonalisation de v, montrer alors que u et v ont les mêmes vecteurs propres. En déduire que $A = B$.

3 Produits matriciels et approximation

Thèmes abordés : séries ; espaces vectoriels ; applications linéaires.

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_1) = 0$ et, pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, $f(e_i) = e_{i-1}$. On note N la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice N^k.

2. Soit $p \in]0, 1[$. On définit les matrices R_p et Q_p par $R_p = (1-p)I + pN = I + Q_p$.

   a) Établir l'égalité $\exp(Q_p) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} e^{-p}\frac{p^j}{j!}N^j$.

   b) Calculer $\|R_p\|$ et $\|Q_p\|$. Montrer que $\|\exp(Q_p)\| \leq 1$.

3. Soit $m \geq 1$ et soient $p_1, p_2, \ldots, p_m$ des réels de $]0, 1[$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on pose $R_i = R_{p_i}$ et $Q_i = Q_{p_i}$.

   a) Montrer les égalités

$$\prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^{m} Q_k\right) = \exp\left(-\left(\sum_{k=1}^{m} p_k\right)(I - N)\right).$$

   b) Établir la relation

$$\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k) = [R_1 - \exp(Q_1)](R_2 \cdots R_m) - \exp(Q_1)\left[\exp(Q_2) \cdots \exp(Q_m) - R_2 \cdots R_m\right].$$

   c) En déduire la majoration $\left\|\displaystyle\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k)\right\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|R_k - \exp(Q_k)\|$.

4. a) Montrer l'égalité

$$\|\exp(Q_1) - R_1\| = |e^{-p_1} - 1 + p_1| + p_1|e^{-p_1} - 1| + e^{-p_1} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{p_1^k}{k!}.$$

b) En déduire successivement les inégalités

$$\|\exp(Q_1) - R_1\| \leq 2p_1^2 \qquad \text{et} \qquad \left\| \prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k) \right\| \leq 2 \sum_{k=1}^{m} p_k^2.$$

4 Approximation d'une loi de Poisson

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; séries ; Python.

Les notations sont celles de la partie précédente. On considère m pièces de monnaie ($1 \leq m < n$) telles que, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, la i-ième pièce donne Pile avec la probabilité p_i et Face avec la probabilité $1 - p_i$. On pose $\lambda = \sum_{i=1}^{m} p_i$.

Un joueur lance successivement la première pièce, la deuxième, et ainsi de suite jusqu'à la m-ième. Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, on note S_k la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus à l'issue des k premiers lancers.

1. a) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, les $k+1$ premiers éléments de la première ligne du produit matriciel $R_1 R_2 \cdots R_k$ représentent la loi de S_k.

b) Montrer la relation

$$\left\| \prod_{i=1}^{m} R_i - \prod_{i=1}^{m} \exp(Q_i) \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \mathbb{P}(S_m = k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right|.$$

c) En déduire l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \mathbb{P}(S_m = k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq 2 \sum_{i=1}^{m} p_i^2.$$

2. La liste `prob` contient les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Écrire une fonction Python `sm(prob)` qui simule la variable aléatoire S_m.

```
import random

def sm(prob):
    nombre_pile = 0
    for p in prob:
        if random.random() < p:
            nombre_pile += 1
    return nombre_pile
```