

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2007

Table des matières

1	Partie I. Approximation du nombre d'urnes vides	2
	Thèmes abordés : probabilités discrètes ; convergence ; estimation.	2
2	Partie II. Équation de Stein pour la loi de Poisson	3
	Thèmes abordés : probabilités discrètes ; équation fonctionnelle.	3
3	Partie III. Approximation de Poisson	5
	Thèmes abordés : somme de Bernoulli ; méthode de Stein.	5
4	Partie IV. Approximation sans indépendance	6
	Thèmes abordés : conditionnement ; variance.	6

1 Partie I. Approximation du nombre d'urnes vides

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; convergence ; estimation.

Posons $a = (1 - 1/n)^m$ et $b = (1 - 2/n)^m$.

1. a) Une urne est vide lorsque chacune des m boules évite cette urne. Ainsi

$$X_i \sim \mathcal{B}\left(1, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right) = \mathcal{B}(1, a).$$

- b) Deux urnes distinctes sont toutes deux vides lorsque chaque boule évite ces deux urnes :

$$\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m = b.$$

Donc

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = b - a^2 < 0,$$

car $1 - 2/n < (1 - 1/n)^2$. Les variables ne sont donc pas indépendantes.

2. a) Par linéarité,

$$\mathbb{E}(W_n) = na = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

- b) La formule de la variance d'une somme donne

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(W_n) &= n\mathbb{V}(X_1) + n(n-1)\text{Cov}(X_1, X_2) \\ &= na + n(n-1)b - n^2a^2. \end{aligned}$$

- c) Par soustraction,

$$\mathbb{E}(W_n) - \mathbb{V}(W_n) = n^2a^2 - n(n-1)b.$$

De plus

$$\frac{a^2}{b} = \left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}\right)^m > 1 > \frac{n-1}{n},$$

d'où $n^2a^2 \geq n(n-1)b$ et $\mathbb{E}(W_n) - \mathbb{V}(W_n) \geq 0$.

3. Écrivons $m = n \ln n + \theta n + \varepsilon_n$, avec $-1 < \varepsilon_n \leq 0$.

- a) Comme $\ln(1 - 1/n) = -1/n + O(1/n^2)$,

$$\ln \mathbb{E}(W_n) = \ln n + m \ln(1 - 1/n) = -\theta + o(1).$$

Ainsi $\mathbb{E}(W_n) \rightarrow e^{-\theta}$.

- b) De même,

$$n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} \longrightarrow e^{-2\theta}, \quad n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m \longrightarrow e^{-2\theta}.$$

Leur différence tend donc vers 0.

c) On a $\mu_n = \mathbb{E}(W_n) \rightarrow \mu = e^{-\theta} > 0$ et le majorant admis tend vers 0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(W_n = k) - e^{-\mu_n} \frac{\mu_n^k}{k!} \rightarrow 0.$$

Le second terme tend vers $e^{-\mu} \mu^k / k!$. Par conséquent

$$\boxed{W_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(e^{-\theta})}.$$

4. a) Pour une loi de Poisson, l'espérance et la variance valent μ . Donc

$$\mathbb{E}(\bar{T}_p) = \mu, \text{ et } \mathbb{V}(\bar{T}_p) = \frac{\mu}{p}.$$

$\bar{T}_p$ est sans biais et, par Bienaymé–Tchebychev,

$$\boxed{\bar{T}_p \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu}.$$

b) Le théorème central limite donne

$$\boxed{U_p = \frac{\sqrt{p}(\bar{T}_p - \mu)}{\sqrt{\mu}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)}.$$

c) La loi limite étant continue et $\mathbb{P}(|U| \leq u) = 1 - \alpha$, on a $\mathbb{P}(|U_p| \leq u) \rightarrow 1 - \alpha$. L'inégalité $|U_p| \leq u$ équivaut à

$$\mu^2 - \left(2\bar{T}_p + \frac{u^2}{p}\right) \mu + \bar{T}_p^2 \leq 0.$$

Les deux racines sont

$$I_p = \bar{T}_p + \frac{u^2}{2p} - \frac{u}{\sqrt{p}} \sqrt{\bar{T}_p + \frac{u^2}{4p}}, \quad J_p = \bar{T}_p + \frac{u^2}{2p} + \frac{u}{\sqrt{p}} \sqrt{\bar{T}_p + \frac{u^2}{4p}}.$$

Ainsi $\boxed{[I_p, J_p]}$ est un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$.

2 Partie II. Équation de Stein pour la loi de Poisson

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; équation fonctionnelle.

Notons $q_A = \mathbb{P}(M \in A)$.

1. a) Pour $A = \emptyset$ ou $A = \mathbb{N}$, la covariance qui définit $f_A(k+1)$ est nulle. Donc $\boxed{f_{\emptyset} = f_{\mathbb{N}} = 0}$.

b) Pour $k = 0$,

$$\boxed{f_A(1) = \begin{cases} (1 - q_A)/\lambda, & 0 \in A, \\ -q_A/\lambda, & 0 \notin A. \end{cases}}$$

Si $0, 1 \in A$, alors

$$\boxed{f_A(2) = \frac{1 + \lambda}{\lambda^2} (1 - q_A)}.$$

2. a) Lorsque $A \cap B = \emptyset$, les indicatrices s'ajoutent et les probabilités aussi dans la définition :

$$\boxed{f_{A \cup B} = f_A + f_B}.$$

b) Puisque $A \cup \bar{A} = \mathbb{N}$ et $f_{\mathbb{N}} = 0$,

$$f_{\bar{A}} = -f_A.$$

3. a) Pour $k \geq 1$, on soustrait les définitions de $\lambda f_A(k+1)$ et de $k f_A(k)$. Il ne reste que le terme de rang k de la loi de Poisson. La même formule vaut pour $k = 0$:

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \mathbf{1}_A(k) - q_A = \begin{cases} 1 - q_A, & k \in A, \\ -q_A, & k \notin A. \end{cases}$$

b) Si A est non vide et distinct de $\mathbb{N}$, alors $0 < q_A < 1$. Le membre de droite précédent n'est jamais nul ; ainsi f_A n'est pas identiquement nulle.

4. Soit $j \geq 1$.

- a) Dans la définition de f_j , si $k \geq j$, $[M = j] \subset [M \leq k]$; si $k < j$, l'intersection est vide. Après simplification par $\mathbb{P}(M = j) = e^{-\lambda} \lambda^j / j!$,

$$f_j(k+1) = \begin{cases} \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} \mathbb{P}(M \geq k+1), & k \geq j, \\ -\frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} \mathbb{P}(M \leq k), & k < j. \end{cases}$$

b) En prenant $k = j$ et $k = j - 1$,

$$f_j(j+1) - f_j(j) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{P}(M \geq j+1) + \frac{1}{j} \mathbb{P}(M \leq j-1) > 0.$$

c) Si $k > j$,

$$f_j(k+1) - f_j(k) = -\frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-j+1}} \sum_{r=k+1}^{+\infty} (r-k) \mathbb{P}(M=r) < 0.$$

Si $k < j$,

$$f_j(k+1) - f_j(k) = -\frac{(k-1)!}{j! \lambda^{k-j+1}} \left(k \mathbb{P}(M=0) + \sum_{r=1}^k (k-r) \mathbb{P}(M=r) \right) < 0.$$

Donc $f_j(k+1) - f_j(k) > 0 \iff k = j$.

- d) En développant les probabilités de la question b) en séries et en regroupant les termes, on obtient

$$f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Or $1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$ et $1 - e^{-\lambda} \leq 1$, donc

$$f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min(1, 1/\lambda).$$

5. Pour $j = 0$ et $k \geq 1$, le calcul du cas $k > j$ précédent reste valable ; ainsi

$$f_0(k+1) - f_0(k) \leq 0.$$

6. a) Si $k \in A$, l'additivité donne $f_A = f_k + f_{A \setminus \{k\}}$ et chaque singleton d'indice différent de k a un accroissement négatif au rang k . Donc $\Delta f_A(k) \leq \Delta f_k(k)$. Si $k \notin A$, on applique ce résultat à $\bar{A}$, puis $f_{\bar{A}} = -f_A$, ce qui donne aussi $-\Delta f_A(k) \leq \Delta f_k(k)$.

b) On dispose donc de $|\Delta f_A(k)| \leq \Delta f_k(k)$. Les questions 4.d) et 5 donnent

$$\sup_{k \geq 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leq \min(1, 1/\lambda).$$

3 Partie III. Approximation de Poisson

Thèmes abordés : somme de Bernoulli ; méthode de Stein.

1. a) Si $X_i = 0$, les deux variables sont nulles ; si $X_i = 1$, $W_n = 1 + R_i$. Donc

$$\boxed{X_i f(W_n) = X_i f(1 + R_i)}.$$

- b) X_i est indépendante de R_i , donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_i f(W_n)) = \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(f(1 + R_i)) = p_i \mathbb{E}(f(1 + R_i))}.$$

2. Puisque $\lambda_n = \sum p_i$ et $W_n = \sum X_i$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) &= \sum_i p_i \mathbb{E}(f(1 + W_n)) - \sum_i \mathbb{E}(X_i f(W_n)) \\ &= \boxed{\sum_i p_i \mathbb{E}(Y_i)}. \end{aligned}$$

3. a) Sur $[X_i = 1]$, $W_n = 1 + R_i$. Comme R_i est indépendante de X_i ,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_i | X_i = 1) = \mathbb{E}(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))}.$$

- b) Sur $[X_i = 0]$, $W_n = R_i$, donc $\boxed{\mathbb{E}(Y_i | X_i = 0) = 0}$.

- c) La formule de l'espérance totale donne

$$\mathbb{E}(Y_i) = p_i \mathbb{E}(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)).$$

Par substitution dans la question 2,

$$\boxed{\mathbb{E}(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_i p_i^2 \mathbb{E}(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))}.$$

4. La borne de la partie II donne presque sûrement $|f(2 + R_i) - f(1 + R_i)| \leq \min(1, 1/\lambda_n)$.
Ainsi

$$\boxed{|\mathbb{E}(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| \leq \min(1, 1/\lambda_n) \sum_i p_i^2}.$$

5. L'équation de Stein appliquée à $k = W_n$ puis l'espérance donnent

$$\boxed{\mathbb{E}(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \mathbb{P}(W_n \in A) - \mathbb{P}(M_n \in A)}.$$

La majoration précédente fournit donc la borne demandée (et même sa version en valeur absolue).

6. Ici $p_i = 1/(n + i)$.

- a) Par comparaison somme-intégrale,

$$\lambda_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \longrightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x} = \boxed{\ln 2}.$$

De plus $0 \leq \sum_i p_i^2 \leq n/(n+1)^2 \rightarrow 0$.

- b) Pour chaque k , on applique la borne à $A = \{k\}$. La loi de M_n converge vers $\mathcal{P}(\ln 2)$, donc

$$\boxed{W_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\ln 2)}.$$

4 Partie IV. Approximation sans indépendance

Thèmes abordés : conditionnement ; variance.

1. a) L'égalité ponctuelle $X_i f(W_n) = X_i f(1 + R_i)$ reste vraie. En conditionnant par $[X_i = 1]$,

$$\mathbb{E}(X_i f(W_n)) = p_i \mathbb{E}(f(1 + R_i) \mid X_i = 1).$$

- b) On reprend le calcul de la partie III sans utiliser l'indépendance :

$$\mathbb{P}(W_n \in A) - \mathbb{P}(M_n \in A) = \sum_i p_i [\mathbb{E}f(1 + W_n) - \mathbb{E}(f(1 + R_i) \mid X_i = 1)].$$

2. a) Si $\ell > j$, la somme télescopique donne

$$|f(\ell) - f(j)| \leq \sum_{r=j}^{\ell-1} |f(r+1) - f(r)| \leq |\ell - j| \min(1, 1/\lambda_n),$$

et le cas $j > \ell$ est symétrique. Comme Z_i a la loi conditionnelle de R_i sachant $X_i = 1$, la question 1.b) devient

$$\sum_i p_i [\mathbb{E}f(1 + W_n) - \mathbb{E}f(1 + Z_i)].$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|\mathbb{P}(W_n \in A) - \mathbb{P}(M_n \in A)| \leq \min(1, 1/\lambda_n) \sum_i p_i \mathbb{E}|W_n - Z_i|.$$

- b) Sous l'hypothèse $W_n \geq Z_i$,

$$\sum_i p_i \mathbb{E}|W_n - Z_i| = \lambda_n \mathbb{E}(W_n) - \sum_i p_i \mathbb{E}(Z_i).$$

Or $\mathbb{E}(W_n) = \lambda_n$ et

$$p_i \mathbb{E}(Z_i) = p_i \mathbb{E}(R_i \mid X_i = 1) = \mathbb{E}(X_i R_i).$$

En sommant,

$$\sum_i \mathbb{E}(X_i R_i) = \mathbb{E} \left(\sum_i X_i (W_n - X_i) \right) = \mathbb{E}(W_n^2 - W_n).$$

Ainsi

$$\sum_i p_i \mathbb{E}|W_n - Z_i| = \lambda_n - \mathbb{V}(W_n).$$

La borne finale en découle immédiatement.