
HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2007

Table des matières

1	Approximation du nombre d’urnes vides	2
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; convergences de variables ; estimations.</i>	<i>2</i>
2	Équation de Stein pour la loi de Poisson	3
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes.</i>	<i>3</i>
3	Approximation de Poisson	4
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; convergences de variables.</i>	<i>4</i>
4	Approximation de Poisson sans indépendance	5
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; convergences de variables.</i>	<i>5</i>

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

1 Approximation du nombre d'urnes vides

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; convergences de variables ; estimations.

Pour toute variable aléatoire réelle Y définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et possédant une espérance, on note $\mathbb{E}(Y)$ cette espérance. Pour tout événement $C \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(C) > 0$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(Y \mid C)$ l'espérance de Y pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_C$.

Cette partie constitue une application particulière des résultats généraux étudiés dans la suite du problème.

On possède n urnes ($n \geq 3$) numérotées de 1 à n , dans lesquelles on répartit au hasard et de façon indépendante m boules indiscernables ($m \geq 4$), de sorte que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité pour chaque boule d'être placée dans l'urne numéro i soit égale à $1/n$. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. À l'issue de cette expérience, on pose, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'urne numéro } i \text{ est vide,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad W_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

1. a) Déterminer, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la loi de la variable aléatoire X_i .
 b) Pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$, ainsi que la covariance de X_i et X_j . Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
2. a) Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(W_n)$ de W_n en fonction de n et m .
 b) On note $\mathbb{V}(W_n)$ la variance de W_n . Calculer $\mathbb{V}(W_n)$ en fonction de n et m .
 c) Vérifier l'égalité

$$\mathbb{E}(W_n) - \mathbb{V}(W_n) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m.$$

En déduire que $\mathbb{E}(W_n) - \mathbb{V}(W_n) \geq 0$.

3. Dans cette question, l'entier m vérifie $m = \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor$, où θ est une constante réelle positive et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .
 a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(W_n)$.
 b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbb{E}(W_n) - \mathbb{V}(W_n)) = 0$.
 c) Soit T_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = \mathbb{E}(W_n)$. On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|\mathbb{P}([W_n = k]) - \mathbb{P}([T_n = k])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) (\mu_n - \mathbb{V}(W_n)).$$

Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \geq 3}$?

4. On pose $\mu = e^{-\theta}$ et on suppose que le paramètre μ est inconnu. Dans cette question, on veut estimer μ .

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère un p -échantillon indépendant et identiquement distribué $(T_1, T_2, \dots, T_p)$ de la loi de Poisson de paramètre μ . On pose

$$\bar{T}_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p T_i \quad \text{et} \quad U_p = \frac{\sqrt{p}(\bar{T}_p - \mu)}{\sqrt{\mu}}.$$

- Montrer que $\bar{T}_p$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre μ .
- Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(U_p)_{p \geq 1}$?
- On veut construire, pour p assez grand, un intervalle de confiance du paramètre μ au risque α donné. Soit u le réel strictement positif tel que $\mathbb{P}([U \geq u]) = \alpha/2$, où U est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
Justifier que, pour p assez grand, on peut écrire $\mathbb{P}(|U_p| \leq u) \simeq 1 - \alpha$, et déterminer alors un intervalle de confiance asymptotique $[I_p, J_p]$ pour μ au risque α .

2 Équation de Stein pour la loi de Poisson

Thèmes abordés : probabilités discrètes.

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif. Soit M une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$ et $\bar{A}$ son complémentaire dans $\mathbb{N}$. On rappelle que si A est non vide, alors

$$\mathbb{P}([M \in A]) = \sum_{i \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!},$$

et on pose par convention $[M \in \emptyset] = \emptyset$. On considère la fonction f_A définie sur $\mathbb{N}$ par $f_A(0) = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{\lambda} (\mathbb{P}([M \in A] \cap [M \leq k]) - \mathbb{P}([M \in A])\mathbb{P}([M \leq k])).$$

- Déterminer la fonction f_A dans les cas particuliers $A = \emptyset$ et $A = \mathbb{N}$.
 - Donner l'expression de $f_A(1)$ en fonction de λ et de $\mathbb{P}([M \in A])$ dans les deux cas suivants : $0 \in A$ et $0 \notin A$. Exprimer $f_A(2)$ en fonction de λ et de $\mathbb{P}([M \in A])$ dans le cas où 0 et 1 appartiennent à A .
- Soit A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}$.
 - Montrer que $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.
 - En déduire que $f_{\bar{A}} = -f_A$.
- Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_A vérifie la relation suivante :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} 1 - \mathbb{P}([M \in A]) & \text{si } k \in A, \\ -\mathbb{P}([M \in A]) & \text{si } k \in \bar{A}. \end{cases}$$

- En déduire que si A est non vide et distincte de $\mathbb{N}$, la fonction f_A n'est pas identiquement nulle.
- Dans cette question, j est un entier naturel non nul et A est le singleton $\{j\}$. On pose $f_{\{j\}} = f_j$.

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité suivante :

$$f_j(k+1) = \begin{cases} \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} \mathbb{P}([M \geq k+1]) & \text{si } k \geq j, \\ -\frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} \mathbb{P}([M \leq k]) & \text{si } k < j. \end{cases}$$

b) Calculer $f_j(j+1) - f_j(j)$, et déterminer son signe.

c) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ différent de j , $f_j(k+1) - f_j(k)$ en distinguant les deux cas $k > j$ et $k < j$. En déduire que la différence $f_j(k+1) - f_j(k)$ est positive si et seulement si $k = j$.

d) Établir les inégalités suivantes :

$$f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right).$$

5. On considère le singleton $\{0\}$ et on pose $f_{\{0\}} = f_0$. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante :

$$f_0(k+1) - f_0(k) \leq 0.$$

6. a) Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k)$$

(on distinguera les deux cas $k \in A$ et $k \notin A$).

b) En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{k \geq 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right).$$

3 Approximation de Poisson

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; convergences de variables.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i strictement positif.

On pose

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n p_i, \quad W_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \text{et, pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad R_i = W_n - X_i.$$

On note M_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ_n . Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$, et f_A la fonction définie dans la partie 2, dans l'expression de laquelle on remplace M par M_n et λ par λ_n . On pose $f = f_A$.

1. a) Établir, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité des deux variables aléatoires $X_i f(W_n)$ et $X_i f(1 + R_i)$.

b) En déduire, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité

$$\mathbb{E}(X_i f(W_n)) = p_i \mathbb{E}(f(1 + R_i)).$$

2. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $Y_i = f(1 + W_n) - f(1 + R_i)$. Établir la relation suivante :

$$\mathbb{E}(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}(Y_i).$$

3. a) Établir, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la formule suivante :

$$\mathbb{E}(Y_i \mid [X_i = 1]) = \mathbb{E}(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)).$$

- b) Calculer, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{E}(Y_i \mid [X_i = 0])$.

- c) Dédurre des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i^2 \mathbb{E}(f(2 + R_i) - f(1 + R_i)).$$

4. Établir l'inégalité suivante :

$$|\mathbb{E}(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

5. À l'aide de la question II.3.a, montrer, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \mathbb{P}([W_n \in A]) - \mathbb{P}([M_n \in A]).$$

En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, la majoration suivante :

$$\mathbb{P}([W_n \in A]) - \mathbb{P}([M_n \in A]) \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

6. Dans cette question uniquement, on suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_i = \frac{1}{n+i}$.

- a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n p_i^2 = 0$.
- b) Déterminer la limite en loi de la suite $(W_n)_{n \geq 2}$.

4 Approximation de Poisson sans indépendance

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; convergences de variables.

Les notations sont identiques à celles de la partie 3, mais les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ne sont pas nécessairement indépendantes.

1. a) Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{E}(X_i f(W_n)) = p_i \mathbb{E}(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1]).$$

- b) En déduire l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}([W_n \in A]) - \mathbb{P}([M_n \in A]) = \sum_{i=1}^n p_i [\mathbb{E}(f(1 + W_n)) - \mathbb{E}(f(1 + R_i) \mid [X_i = 1])].$$

2. On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe une variable aléatoire Z_i définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la loi de Z_i soit identique à la loi conditionnelle de R_i sachant $[X_i = 1]$.

a) Justifier, pour tout couple (ℓ, j) d'entiers naturels, l'inégalité

$$|f(\ell) - f(j)| \leq |\ell - j| \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right),$$

et en déduire la majoration suivante :

$$|\mathbb{P}([W_n \in A]) - \mathbb{P}([M_n \in A])| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}(|W_n - Z_i|).$$

- b) On suppose de plus que, pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $W_n(\omega) \geq Z_i(\omega)$. Établir l'égalité

$$\sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - \mathbb{V}(W_n),$$

où $\mathbb{V}(W_n)$ désigne la variance de W_n . En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$|\mathbb{P}([W_n \in A]) - \mathbb{P}([M_n \in A])| \leq \min \left(1, \frac{1}{\lambda_n} \right) (\lambda_n - \mathbb{V}(W_n)).$$