

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2008

Table des matières

1	Préliminaire	2
	Thèmes abordés : intégrales généralisées ; transformées exponentielles.	2
2	Partie I. Loi du χ^2 centré	3
	Thèmes abordés : loi gamma ; estimation ; intervalle de confiance.	3
3	Partie II. Loi du χ^2 décentré	4
	Thèmes abordés : moments ; transformée exponentielle.	4
4	Partie III. Nombre aléatoire de degrés de liberté	4
	Thèmes abordés : conditionnement ; loi de Poisson.	4
5	Partie IV. Estimateur de James–Stein	6
	Thèmes abordés : estimation vectorielle ; risque quadratique.	6

1 Préliminaire

Thèmes abordés : intégrales généralisées ; transformées exponentielles.

1. a) Si $a \leq 0$, $e^{-ax^2} \geq 1$ et l'intégrale diverge. Si $a > 0$, elle converge par comparaison au voisinage de l'infini et le changement de variable $u = \sqrt{2a}x$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

- b) On complète le carré :

$$-ax^2 + bx = -a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a}.$$

La translation ne change pas la nature de l'intégrale. Elle converge donc exactement si $a > 0$ et vaut alors

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \left(\frac{b^2}{4a} \right).$$

2. a) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, la question 1.b) donne

$$\Phi_U(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2+sx} dx = \boxed{e^{s^2/2}}.$$

Ainsi $\boxed{D_U = \mathbb{R}}$.

- b) Pour $Z = U^2$,

$$\Phi_Z(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-s)x^2} dx.$$

Cette intégrale converge exactement si $s < 1/2$ et

$$\boxed{D_Z =]-\infty, 1/2[, \quad \Phi_Z(s) = (1-2s)^{-1/2}}.$$

3. a) Comme $e^{s(\mu X + \beta)} = e^{\beta s} e^{\mu s X}$,

$$\boxed{s \in D_{\mu X + \beta} \iff \mu s \in D_X, \text{ et } \Phi_{\mu X + \beta}(s) = e^{\beta s} \Phi_X(\mu s)}.$$

- b) Si $X \sim \gamma(\nu)$, le changement de variable $u = (1-s)x$ est valable pour $s < 1$ et donne

$$\Phi_X(s) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-(1-s)x} dx = (1-s)^{-\nu}.$$

Pour $s \geq 1$, l'intégrale diverge. Donc

$$\boxed{D_X =]-\infty, 1[, \quad \Phi_X(s) = (1-s)^{-\nu}}.$$

La question a) appliquée à $2X$ donne

$$\boxed{D_{2X} =]-\infty, 1/2[, \quad \Phi_{2X}(s) = (1-2s)^{-\nu}}.$$

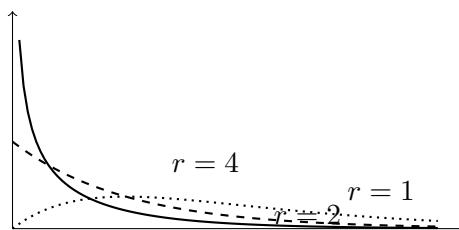
2 Partie I. Loi du χ^2 centré

Thèmes abordés : loi gamma ; estimation ; intervalle de confiance.

1. Pour $x > 0$,

$$f'_{X_r}(x) = \frac{x^{r/2-2}e^{-x/2}}{2^{r/2+1}\Gamma(r/2)}(r-2-x).$$

Ainsi f_{X_1} est strictement décroissante de $+\infty$ vers 0 ; $f_{X_2}(x) = e^{-x/2}/2$ est strictement décroissante de $1/2$ vers 0 ; si $r > 2$, la densité part de 0, croît jusqu'à son maximum en $x = r - 2$, puis décroît vers 0.



2. a) La transformation $x \mapsto x/2$ montre que $X_r/2 \sim \gamma(r/2)$. Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{E}(X_r) = r, \quad \mathbb{V}(X_r) = 2r}.$$

- b) Avec $X_r = 2G$, où $G \sim \gamma(r/2)$, le préliminaire donne

$$\boxed{D_{X_r} =]-\infty, 1/2[, \quad \Phi_{X_r}(s) = (1 - 2s)^{-r/2}}.$$

3. a) $Z_1 = U_1^2$ et U^2 ont même loi puisque U_1 et U ont même loi.
b) Pour $s < 1/2$, l'indépendance donne

$$\Phi_{W_n}(s) = \prod_{i=1}^n \Phi_{Z_i}(s) = (1 - 2s)^{-n/2}.$$

Cette transformée est celle d'une loi $\chi^2(n)$, donc $\boxed{W_n \sim \chi^2(n)}$.

- c) On a donc

$$\boxed{D_{W_n} =]-\infty, 1/2[, \quad \Phi_{W_n}(s) = (1 - 2s)^{-n/2} = \prod_{i=1}^n \Phi_{Z_i}(s)}.$$

4. a) Puisque $T_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$,

$$\mathbb{E}(T_i^2) = \sigma^2, \quad \mathbb{V}(T_i^2) = 2\sigma^4.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \sigma^2, \quad \mathbb{V}(S_n) = \frac{2\sigma^4}{n}}.$$

S_n est sans biais et l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev prouve $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$.

- b) Les variables T_i/σ sont normales centrées réduites indépendantes, donc

$$\frac{nS_n}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_i}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n).$$

Par définition de k_α ,

$$\mathbb{P} \left(0 < \sigma^2 \leq \frac{nS_n}{k_\alpha} \right) = \mathbb{P} \left(\frac{nS_n}{\sigma^2} \geq k_\alpha \right) = 1 - \alpha.$$

Donc $\boxed{]0, nS_n/k_\alpha]}$ est un intervalle de confiance au risque α .

3 Partie II. Loi du χ^2 décentré

Thèmes abordés : moments ; transformée exponentielle.

1. a) L'intégrande définissant $\mathbb{E}(U^3)$ est impaire, donc $\mathbb{E}(U^3) = 0$. Une intégration par parties, avec $u = x^3$ et $dv = xe^{-x^2/2}dx$, donne

$$\boxed{\mathbb{E}(U^4) = 3\mathbb{E}(U^2) = 3}.$$

- b) Écrivons $M_1 = U + m_1$. Alors $Y_1 = (U + m_1)^2$ et, en développant à l'aide des moments précédents,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_1) = 1 + \lambda_1, \quad \mathbb{V}(Y_1) = 2 + 4\lambda_1}.$$

- c) Le théorème de transfert donne

$$\Phi_{Y_1}(s) = \frac{e^{-m_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2-s)x^2+m_1x} dx.$$

Par le préliminaire, l'intégrale converge exactement si $s < 1/2$ et

$$\boxed{\Phi_{Y_1}(s) = (1 - 2s)^{-1/2} \exp \left(\frac{\lambda_1 s}{1 - 2s} \right)}.$$

2. a) Par indépendance des M_j^2 ,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = n + \lambda_n, \quad \mathbb{V}(Y_n) = 2n + 4\lambda_n}.$$

- b) Le produit des transformées de la question précédente vaut

$$\boxed{\Phi_{Y_n}(s) = (1 - 2s)^{-n/2} \exp \left(\frac{\lambda_n s}{1 - 2s} \right)}, \quad s < \frac{1}{2}.$$

4 Partie III. Nombre aléatoire de degrés de liberté

Thèmes abordés : conditionnement ; loi de Poisson.

1. a) Sur $[K = k]$, $X = X_k$. Comme K est indépendante de (J_i) ,

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leq x \mid K = k) = \mathbb{P}(X_k \leq x)}.$$

b) Pour $0 \leq x \leq 1$, $\mathbb{P}(X_k \leq x) = x^k$. La formule des probabilités totales donne

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^k, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

c) Une densité est $f_X(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ sur $]0, 1[$, nulle ailleurs. Comme $0 \leq X \leq 1$, l'espérance existe et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1}.$$

d) Conditionnellement à $K = k$, X a la loi de X_k , dont l'espérance vaut $k/(k+1)$. Ainsi $g(k) = k/(k+1)$ pour $1 \leq k \leq n$, et

$$\mathbb{E}(g(K)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \mathbb{E}(X).$$

2. a) Sur $[K = k]$, $H_n = \sum_{i=1}^{n+2k} U_i^2$, donc sa loi conditionnelle est $\chi^2(n+2k)$, celle de W_{n+2k} .

b) Pour $X = e^{sH_n}$,

$$g(k) = \mathbb{E}(e^{sH_n} | K = k) = (1 - 2s)^{-n/2-k}.$$

c) En utilisant la série exponentielle de la loi de Poisson,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(K)) &= (1 - 2s)^{-n/2} e^{-\lambda/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{2(1 - 2s)} \right)^k \\ &= (1 - 2s)^{-n/2} \exp \left(\frac{\lambda s}{1 - 2s} \right). \end{aligned}$$

d) La formule (*) montre que cette expression est $\Phi_{H_n}(s)$. C'est la transformée de la loi $\chi^2(n, \lambda)$ sur l'intervalle $] -\infty, 1/2[$; donc

$$H_n \sim \chi^2(n, \lambda).$$

e) Pour $n \geq 3$, si $W_r \sim \chi^2(r)$, un calcul sur la densité gamma donne

$$\mathbb{E}(1/W_r) = \frac{1}{r-2}.$$

Conditionnellement à $K = k$, $H_n \sim W_{n+2k}$. La formule de l'espérance totale entraîne alors

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{H_n} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(K = k)}{n - 2 + 2k} = \mathbb{E} \left(\frac{1}{n - 2 + 2K} \right).$$

5 Partie IV. Estimateur de James–Stein

Thèmes abordés : estimation vectorielle ; risque quadratique.

1. Chaque $\hat{\theta}_j$ suit $\mathcal{N}(\theta_j, 1)$ et ces variables sont indépendantes. Par définition,

$$B_p = \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j^2 \sim \chi^2(p, b_p).$$

La partie II donne $\mathbb{E}(B_p) = p + b_p$, donc son biais comme estimateur de b_p vaut p .

2. a) En développant le risque,

$$\begin{aligned} R(\theta^*, \theta) &= \mathbb{E}(B_p) - 2c + c^2 \mathbb{E}(1/B_p) - 2b_p \\ &\quad + 2c \mathbb{E} \left(\frac{1}{B_p} \sum_j \theta_j \hat{\theta}_j \right) + b_p. \end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(B_p) = p + b_p$, $\mathbb{E}(1/B_p) = \mathbb{E}(1/(p - 2 + 2K))$ d'après la partie III, et l'espérance admise vaut

$$\mathbb{E} \left(\frac{2K}{p - 2 + 2K} \right) = 1 - (p - 2) \mathbb{E} \left(\frac{1}{p - 2 + 2K} \right).$$

Comme $R(\hat{\theta}, \theta) = p$, il vient

$$R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta) = (c^2 - 2c(p - 2)) \mathbb{E} \left(\frac{1}{p - 2 + 2K} \right).$$

- b) L'espérance finale est strictement positive. La différence des risques est donc négative exactement lorsque

$$0 < c < 2(p - 2).$$

Le trinôme en c est minimal au sommet $c = p - 2$. L'estimateur de James–Stein correspondant est

$$\theta^* = \left(1 - \frac{p - 2}{B_p} \right) \hat{\theta}.$$