

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2009

Table des matières

1	Préliminaire	2
	Thèmes abordés : probabilités discrètes.	2
2	Partie I. Infimum et supremum	2
	Thèmes abordés : probabilités discrètes ; suites ; Python.	2
3	Partie II. Couple (Inf, Sup)	3
	Thèmes abordés : couples de variables discrètes ; corrélation.	3
4	Partie III. Préviation	4
	Thèmes abordés : espérance conditionnelle ; minimisation quadratique.	4
5	Partie IV. Estimation	6
	Thèmes abordés : biais ; convergence ; optimalité.	6

1 Préliminaire

Thèmes abordés : probabilités discrètes.

1. En écrivant $\mathbb{P}(Y > k) = \sum_{i=k+1}^N \mathbb{P}(Y = i)$ puis en permutant deux sommes finies,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(Y > k) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=0}^{i-1} 1 \right) \mathbb{P}(Y = i) = \mathbb{E}(Y).$$

De même, comme $\sum_{k=0}^{i-1} (2k+1) = i^2$,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(Y > k), \quad \mathbb{E}(Y^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}(Y > k).$$

2 Partie I. Infimum et supremum

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; suites ; Python.

2. Pour la loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\mathbb{E}(U_1) = \frac{N+1}{2}, \quad \mathbb{V}(U_1) = \frac{N^2-1}{12}.$$

3. a) Par indépendance,

$$\mathbb{P}(T_n \leq k) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(U_i \leq k) = \left(\frac{k}{N} \right)^n.$$

- b) Par différence de deux valeurs de la fonction de répartition,

$$\mathbb{P}(T_n = k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

4. a) Chaque terme $(k/N)^n$, $1 \leq k < N$, tend vers 0 ; la somme étant finie,

$$d_n(N) \longrightarrow 0.$$

- b) Le préliminaire donne

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{k}{N} \right)^n \right) = \boxed{N - d_n(N)} \longrightarrow N.$$

- c) De la seconde identité préliminaire,

$$\mathbb{E}(T_n^2) = N^2 - d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N).$$

En retranchant $(N - d_n(N))^2$,

$$\mathbb{V}(T_n) = (2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n(N)^2 \longrightarrow 0.$$

d) Si $N \geq 2$, le dernier terme domine la somme finie :

$$d_n(N) \sim \left(\frac{N-1}{N}\right)^n, \text{ quand } \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} \rightarrow 1 - \frac{1}{N}.$$

Ainsi

$$\frac{\mathbb{V}(T_n)}{d_n(N)} = (2N-1) - 2N \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - d_n(N) \rightarrow 1,$$

soit $\boxed{\mathbb{V}(T_n) \sim d_n(N)}$.

5. Pour $1 \leq k \leq N$,

$$\mathbb{P}(Z_n \geq k) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n,$$

d'où

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{(N-k+1)^n - (N-k)^n}{N^n}}.$$

On reconnaît la loi de $N+1-T_n$, donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = 1 + d_n(N), \quad \mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{V}(T_n)}.$$

6. Une traduction directe de la définition est :

```
from random import randint

def simulmax(n):
    t = 1
    for _ in range(n):
        t = max(t, randint(1, N))
    return t
```

3 Partie II. Couple (Inf, Sup)

Thèmes abordés : couples de variables discrètes ; corrélation.

7. a) Si $k \leq \ell$, l'événement $[T_n \leq k]$ impose $[Z_n \leq \ell]$. Si $k > \ell$, on retranche le cas où toutes les observations appartiennent à $[\ell+1, k]$. Ainsi

$$\boxed{\phi_n(k, \ell) = \begin{cases} (k/N)^n, & k \leq \ell, \\ (k/N)^n - ((k-\ell)/N)^n, & k > \ell. \end{cases}}$$

b) Une double différence de fonctions de répartition donne

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = k, Z_n = \ell) = \phi_n(k, \ell) + \phi_n(k-1, \ell-1) - \phi_n(k-1, \ell) - \phi_n(k, \ell-1)}.$$

c) Après substitution,

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = k, Z_n = \ell) = \begin{cases} 0, & k < \ell, \\ N^{-n}, & k = \ell, \\ N^{-n}((k-\ell+1)^n - 2(k-\ell)^n + (k-\ell-1)^n), & k > \ell. \end{cases}}$$

8. a) Le théorème de transfert et la loi jointe précédente donnent, après le changement d'indice $j = k - \ell$, une somme seconde-différence. Les deux identités fournies la réduisent à

$$\mathbb{E}(T_n Z_n) = \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^N k^{n+1} = \boxed{N(1 + d_{n+1}(N))}.$$

- b) Puisque $\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{V}(T_n)$,

$$\rho_n = \frac{\text{Cov}(T_n, Z_n)}{\mathbb{V}(T_n)}.$$

Or

$$\text{Cov}(T_n, Z_n) = N d_{n+1}(N) - N d_n(N) + d_n(N)^2 + d_n(N).$$

En divisant par $d_n(N)$ et en utilisant 4.d),

$$\boxed{\rho_n \longrightarrow N \left(1 - \frac{1}{N}\right) - N + 1 = 0}.$$

9. a) En divisant la loi jointe par $\mathbb{P}(T_n = k) = (k^n - (k-1)^n)/N^n$,

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n = \ell \mid T_n = k) = \begin{cases} 0, & \ell > k, \\ \frac{1}{k^n - (k-1)^n}, & \ell = k, \\ \frac{(k - \ell + 1)^n - 2(k - \ell)^n + (k - \ell - 1)^n}{k^n - (k-1)^n}, & \ell < k. \end{cases}}$$

- b) La somme définissant l'espérance conditionnelle se simplifie grâce aux identités de la question 8 :

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n \mid T_n = k) = \frac{k^n}{k^n - (k-1)^n}}.$$

4 Partie III. Prévision

Thèmes abordés : espérance conditionnelle ; minimisation quadratique.

10. Les t_k étant deux à deux distincts, $W_t(T_n) = t_k$ équivaut à $T_n = k$; donc

$$\boxed{\mathbb{P}(W_t(T_n) = t_k) = \mathbb{P}(T_n = k)}.$$

11. Par définition de l'espérance pour la probabilité conditionnelle,

$$\boxed{\mathbb{E}(T_{n+1} \mathbf{1}_{[T_n=k]}) = \mathbb{E}(T_{n+1} \mid T_n = k) \mathbb{P}(T_n = k)}.$$

12. a) Comme $T_{n+1} = \max(T_n, U_{n+1})$ et U_{n+1} est indépendante de T_n ,

$$\mathbb{P}(T_n = k, T_{n+1} = j) = \mathbb{P}(T_n = k) \begin{cases} 0, & j < k, \\ k/N, & j = k, \\ 1/N, & j > k. \end{cases}$$

- b) Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(T_{n+1} = j \mid T_n = k) = \begin{cases} 0, & j < k, \\ k/N, & j = k, \\ 1/N, & j > k. \end{cases}}$$

c) Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{n+1} \mid T_n = k) &= \frac{k^2}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=k+1}^N j \\ &= \boxed{\frac{N+1}{2} + \frac{k^2 - k}{2N}} =: m_k.\end{aligned}$$

d) La formule de l'espérance totale donne

$$\boxed{\mathbb{E}(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2} + \frac{\mathbb{E}(T_n^2) - \mathbb{E}(T_n)}{2N}}.$$

13. Les indicatrices sont deux à deux incompatibles et leur carré leur est égal ; par conséquent

$$\boxed{W_t(T_n)^2 = \sum_{k=1}^N t_k^2 \mathbf{1}_{[T_n=k]}}.$$

14. a) En développant le carré et en utilisant 11,

$$\boxed{g(t) = \mathbb{E}(T_{n+1}^2) + \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(T_n = k)(t_k^2 - 2m_k t_k)}.$$

b) En complétant les carrés,

$$g(t) = \mathbb{E}(T_{n+1}^2) - \sum_k \mathbb{P}(T_n = k)m_k^2 + \sum_k \mathbb{P}(T_n = k)(t_k - m_k)^2.$$

Toutes les probabilités sont strictement positives. Le minimum global, unique, est atteint en

$$\boxed{\theta_k = m_k = \mathbb{E}(T_{n+1} \mid T_n = k)}.$$

15. La formule de l'espérance totale donne

$$\boxed{\mathbb{E}(W_\theta(T_n)) = \sum_k m_k \mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{E}(T_{n+1})}.$$

De plus $\mathbb{E}(T_{n+1}W_\theta(T_n)) = \mathbb{E}(W_\theta(T_n)^2)$. Ainsi

$$0 \leq \mathbb{E}((T_{n+1} - W_\theta(T_n))^2) = \mathbb{E}(T_{n+1}^2) - \mathbb{E}(W_\theta(T_n)^2).$$

Les moyennes étant égales, $\boxed{\mathbb{V}(W_\theta(T_n)) \leq \mathbb{V}(T_{n+1})}$.

16. a) Pour chaque issue, une seule indicatrice vaut 1, celle d'indice T_n :

$$\boxed{\sum_{k=1}^N k^i \mathbf{1}_{[T_n=k]} = T_n^i}.$$

b) En remplaçant θ_k par sa valeur de 12.c),

$$\boxed{W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} + \frac{T_n^2 - T_n}{2N}}.$$

5 Partie IV. Estimation

Thèmes abordés : *biais ; convergence ; optimalité.*

17. a) Bien que $\mathbb{E}(T_n + d_n(N)) = N$, la statistique contient le paramètre inconnu N via $d_n(N)$:
ce n'est pas un estimateur de N .

- b) T_n est une statistique de l'échantillon et $\mathbb{E}(T_n) = N - d_n(N) \rightarrow N$. Ainsi

$$\text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> T_n est asymptotiquement sans biais.$$

- c) Puisque $N = \mathbb{E}(T_n) + d_n(N)$,

$$|T_n - N| \leq |T_n - \mathbb{E}(T_n)| + |d_n(N)|,$$

d'où $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$. Comme $d_n(N) \rightarrow 0$, pour n assez grand, $|d_n(N)| < \varepsilon/2$ et

$$B_n(\varepsilon) \subset [|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \varepsilon/2].$$

- d) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors

$$\mathbb{P}(|T_n - N| \geq \varepsilon) \leq \frac{4\mathbb{V}(T_n)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Donc $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} N$.

18. a) Par indépendance, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in \llbracket 1, N \rrbracket^n$,

$$\text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $\mathbb{P}(U_1 = u_1, \dots, U_n = u_n) = N^{-n}$.$$

- b) En divisant par $\mathbb{P}(T_n = k) = (k^n - (k-1)^n)/N^n$, on obtient

$$\text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $\mathbb{P}(U_1 = u_1, \dots, U_n = u_n \mid T_n = k) = \frac{1}{k^n - (k-1)^n}$$$

si tous les u_i appartiennent à $\llbracket 1, k \rrbracket$ et si leur maximum vaut k ; la probabilité vaut 0 sinon. Elle ne dépend pas de N .

19. a) D'après les espérances de T_n et Z_n ,

$$\text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $\mathbb{E}(S_n) = N - d_n(N) + 1 + d_n(N) - 1 = N$.$$

- b) À l'aide de 9.b),

$$\mathbb{E}(S_n \mid T_n = k) = k - 1 + \frac{k^n}{k^n - (k-1)^n} = \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $\frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} = \psi_n(k)$.$$

- c) La formule de l'espérance totale entraîne

$$\text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $\mathbb{E}(\psi_n(T_n)) = \mathbb{E}(S_n) = N$.$$

- d) Pour tout réel λ ,

$$0 \leq \mathbb{E}((S_n - \lambda)^2 \mid T_n = k) = \varphi_n(k) - 2\lambda\psi_n(k) + \lambda^2.$$

Le discriminant est négatif ou nul, donc $\psi_n(k)^2 \leq \varphi_n(k)$. En multipliant par $\mathbb{P}(T_n = k)$, en sommant et en retranchant la moyenne commune N au carré,

$$\text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $\mathbb{V}(\psi_n(T_n)) \leq \mathbb{V}(S_n)$.$$

- e) En utilisant les expressions de $\mathbb{V}(T_n)$ et de $\text{Cov}(T_n, Z_n)$,

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = 2N(d_n(N) - d_{n+1}(N))} \longrightarrow 0.$$

Donc $\mathbb{V}(\psi_n(T_n)) \rightarrow 0$ et cet estimateur sans biais vérifie

$$\boxed{\psi_n(T_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} N}.$$

20. a) $f_n(T_n)$ est sans biais par la formule de l'espérance totale. Le même raisonnement quadratique que précédemment donne

$$f_n(k)^2 \leq \mathbb{E}(R_n^2 \mid T_n = k).$$

Après sommation, $\boxed{\mathbb{V}(f_n(T_n)) \leq \mathbb{V}(R_n)}$.

- b) On a

$$\mathbb{E}(F(T_n)) = \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^N F(k)(k^n - (k-1)^n).$$

La condition est évidemment satisfaite pour $F = \psi_n$. Réciproquement, soustraire l'identité obtenue au rang $N-1$ de celle du rang N donne

$$(F(N) - \psi_n(N))(N^n - (N-1)^n) = 0.$$

Comme le facteur est strictement positif, une récurrence partant de $N=1$ établit

$$\boxed{\mathbb{E}(F(T_n)) = N \quad \forall N \iff F(k) = \psi_n(k) \quad \forall k}.$$

- c) Pour tout estimateur sans biais R_n , la fonction f_n précédente définit un estimateur sans biais fonction de T_n . D'après b), $f_n = \psi_n$, puis a) donne

$$\boxed{\mathbb{V}(\psi_n(T_n)) \leq \mathbb{V}(R_n)}.$$

Ainsi $\psi_n(T_n)$ est l'estimateur sans biais de variance minimale.