# ECRICOME

Mathématiques approfondies

## Corrigé du sujet adapté – 2010

---

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

## Exercice 1

**Exercice 1 – Équivalent d'une suite d'intégrales**

$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+\cdots+t^{n-1}}$ et $v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u}\,\mathrm{d}u$, pour $n \geqslant 1$.

**Corrigé – Exercice 1.**

**1. Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.**

**a)** On note $g_n(t) = \frac{1}{1+t+\cdots+t^{n-1}}$, fonction continue sur $[0,1]$ (le dénominateur est $\geqslant 1$), donc $u_n$ existe. Pour $t \in [0,1[$, on a $1+t+\cdots+t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$, d'où

$$g_n(t) - (1-t) = \frac{1-t}{1-t^n} - (1-t) = (1-t)\,\frac{1-(1-t^n)}{1-t^n} = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$

$$\boxed{\forall t \in [0,1[, \quad \frac{1}{1+t+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.}$$

Ainsi $g_n(t) - (1-t) = t^n g_n(t)$ pour $t \in [0,1[$, et aussi pour $t=1$ (les deux membres valent $\frac{1}{n}$). Comme $0 < g_n(t) \leqslant 1$, on a $0 \leqslant g_n(t) - (1-t) \leqslant t^n$ sur $[0,1]$. Par croissance de l'intégrale, avec $\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et $\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$ :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

Par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$

**b)** D'après a), $u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 t^n g_n(t)\,\mathrm{d}t$, intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$, égale à $\frac{(1-t)t^n}{1-t^n}$ sur $[0,1[$. Soient $0 < a < b < 1$. La fonction $\varphi : u \mapsto u^{1/n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec $\varphi'(u) = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}$. Le changement de variable $t = \varphi(u)$ (soit $u = t^n$) donne

$$\int_{a^{1/n}}^{b^{1/n}} \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{(1-u^{1/n})\,u}{1-u} \cdot \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_a^b \frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

Quand $a \to 0$ et $b \to 1$, le membre de gauche tend vers $\int_0^1 t^n g_n(t)\,\mathrm{d}t = u_n - \frac{1}{2}$ (intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0,1]$). Le membre de droite converge donc : l'intégrale $v_n$ converge, et

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.}$$

**2. Résultats intermédiaires.**

**a)** On a $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \ln'(1) = 1$, et $\frac{(\ln x)^k}{x-1} = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^k (x-1)^{k-1}$.

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1} = 1 \text{ si } k = 1, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1} = 0 \text{ si } k \geqslant 2.}$$

**b)** La fonction $h_k : x \mapsto \frac{(\ln x)^k}{x-1}$ est continue sur $]0,1[$.

- En 1 : par a), $h_k$ admet une limite finie, donc l'intégrale est faussement impropre en 1.
- En 0 : $|h_k(x)| \underset{x\to 0}{\sim} |\ln x|^k$, et $\sqrt{x}\,|\ln x|^k \to 0$ par croissances comparées, donc $|h_k(x)| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Or $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge (intégrale de Riemann, $\frac{1}{2} < 1$). Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{1/2} |h_k(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.

L'intégrale converge absolument, donc converge.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1}\,\mathrm{d}x \text{ converge pour tout } k \geqslant 1.}$$

**c)** $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}$ et $f''(x) = \mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{2x}$, donc $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$. Pour $x \leqslant 0$, on pose $y = \mathrm{e}^x \in ]0,1]$ : $f''(x) = y - 4y^2$. D'une part $y - 4y^2 \leqslant y \leqslant 1 \leqslant 3$, d'autre part $y - 4y^2 + 3 = (4y+3)(1-y) \geqslant 0$. Donc $|f''| \leqslant 3$ sur $]-\infty, 0]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre 0 et $x \leqslant 0$ donne $|f(x) - f(0) - f'(0)x| \leqslant \frac{3x^2}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in ]-\infty, 0], \quad \left|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} + x\right| \leqslant \frac{3x^2}{2}.}$$

**3. Application.**

**a)** Soit $u \in ]0,1[$. On applique 2c) à $x = \frac{\ln u}{n} \leqslant 0$, avec $\mathrm{e}^x = u^{1/n}$ et $\mathrm{e}^{2x} = u^{2/n}$, puis on divise par $1 - u > 0$ :

$$\left|\frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} + \frac{1}{n} \cdot \frac{\ln u}{1-u}\right| \leqslant \frac{3}{2n^2} \cdot \frac{(\ln u)^2}{1-u}.$$

Les intégrales $v_n$ (question 1b), $\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u$ et $\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u$ (question 2b, au signe près) convergent. Par comparaison, l'intégrale de la valeur absolue du membre de gauche converge. Par linéarité, puis par l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant) :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \left|v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u.}$$

**b)** On note $J = \int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u$. En multipliant a) par $n$, on obtient $|nv_n + I| \leqslant \frac{3J}{2n} \to 0$, donc $nv_n \to -I$. Par ailleurs, $u \mapsto \frac{\ln u}{1-u}$ est continue et strictement négative sur $]0,1[$, donc $I < 0$, et en particulier $-I \neq 0$. Ainsi $\frac{v_n}{-I/n} \to 1$, puis, par 1b), $u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}$.

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{I}{n}, \qquad u_n - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{I}{n^2}.}$$

## Exercice 2

**Exercice 2 – Polynômes $H_n$ et points critiques**

$f(P) = P'' - 4XP'$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ ; $V(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|$ sur $U$.

**Corrigé – Exercice 2.**

**1. Étude de $f$.**

**a)** La dérivation est linéaire, donc, pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$. Si $\deg P \leqslant n$, alors $\deg P'' \leqslant n-2$ et $\deg(XP') \leqslant n$, donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

**b)** On a $f(1) = 0$, $f(X) = 0 - 4X \cdot 1$ et, pour $k \geqslant 2$, $(X^k)'' = k(k-1)X^{k-2}$ et $X(X^k)' = kX^k$.

$$\boxed{f(1) = 0, \qquad f(X) = -4X, \qquad f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 4kX^k \quad (2 \leqslant k \leqslant n).}$$

Dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$, la colonne d'indice $k$ (celle de $f(X^k)$) n'a de coefficients non nuls qu'aux lignes d'indices $k-2$ et $k$, c'est-à-dire au-dessus de la diagonale ou sur celle-ci.

$$\boxed{A_n \text{ est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux } 0, -4, -8, \ldots, -4n.}$$

**c)** Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Sp}(f) = \{-4k,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$, qui compte $n+1$ valeurs distinctes. Chaque sous-espace propre est de dimension au moins 1, et la somme de leurs dimensions est au plus $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Ainsi chacun est de dimension exactement 1, et la somme vaut $n+1$.

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable, et ses } n+1 \text{ sous-espaces propres sont de dimension 1.}}$$

**d)** Soit $P \neq 0$ tel que $f(P) = \lambda P$, avec $d = \deg P$ et $a \neq 0$ son coefficient dominant. Si $d = 0$, alors $f(P) = 0$, donc $\lambda = 0$. Si $d \geqslant 1$, $\deg P'' \leqslant d-2$ et $XP' = daX^d + \cdots$, donc le coefficient de $X^d$ dans $f(P)$ vaut $-4da$. Comme il vaut aussi $\lambda a$, on obtient $\lambda = -4d$.

$$\boxed{\lambda = -4\deg(P).}$$

Par c), $\ker(f + 4n\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(P_0)$ avec $P_0 \neq 0$, et, par ce qui précède, $\deg P_0 = n$. Si $c$ est le coefficient dominant de $P_0$, alors $H_n = \frac{1}{c}P_0$ est unitaire de degré $n$ et

vérifie $f(H_n) = -4nH_n$. Si $H$ est unitaire de degré $n$ avec $f(H) = -4nH$, alors $H = \mu P_0$, et $\mu = \frac{1}{c}$ puisque $H$ est unitaire, donc $H = H_n$. On remarque que $f(P) = P'' - 4XP'$ ne dépend pas de l'espace $\mathbb{R}_m[X]$ ($m \geqslant \deg P$) dans lequel on considère $P$.

Il existe un unique polynôme unitaire $H_n$ de degré $n$ tel que $f(H_n) = -4nH_n$.

**2. Étude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

**a)** Soit $n \geqslant 1$. On dérive $H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n$ :

$$H_n''' - 4H_n' - 4XH_n'' = -4nH_n', \qquad \text{soit} \qquad (H_n')'' - 4X(H_n')' = -4(n-1)H_n'.$$

$$\forall n \geqslant 1, \quad f(H_n') = -4(n-1)H_n'.$$

Comme $H_n = X^n + \cdots$, on a $H_n' = nX^{n-1} + \cdots$ : $\frac{1}{n}H_n'$ est unitaire de degré $n-1$ et vérifie $(\mathcal{E}_{n-1})$. Par l'unicité de 1d), $\frac{1}{n}H_n' = H_{n-1}$. Pour $n \geqslant 2$, on en déduit $H_n'' = nH_{n-1}' = n(n-1)H_{n-2}$. En reportant dans $(\mathcal{E}_n)$, on obtient $n(n-1)H_{n-2} - 4nXH_{n-1} = -4nH_n$, et l'on divise par $-4n$.

$$\forall n \geqslant 1,\ H_n' = nH_{n-1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2,\ H_n - XH_{n-1} + \frac{n-1}{4}H_{n-2} = 0.$$

**b)** 1 est unitaire de degré 0 et $f(1) = 0 = -4 \cdot 0 \cdot 1$ ; $X$ est unitaire de degré 1 et $f(X) = -4X = -4 \cdot 1 \cdot X$. Par unicité, $H_0 = 1$ et $H_1 = X$. La relation de a) donne $H_2 = XH_1 - \frac{1}{4}H_0$, puis $H_3 = XH_2 - \frac{2}{4}H_1 = X^3 - \frac{1}{4}X - \frac{1}{2}X$.

$$H_0 = 1, \quad H_1 = X, \quad H_2 = X^2 - \frac{1}{4}, \quad H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X.$$

**c)** On garde en mémoire les deux derniers termes $a = u_{n-2}$ et $b = u_{n-1}$, que l'on met à jour pour $n$ allant de 2 à 2010.

```
def suite(N):
    a = 1           # u_{n-2}
    b = 1           # u_{n-1}
    for n in range(2, N + 1):
        c = b - (n - 1) / 4 * a
        a = b
        b = c
    return b
```

`suite(2010)` renvoie $u_{2010}$.

**3. Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.**

**a)** $V$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U$ : la fonction $s \mapsto \ln|s|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $\frac{1}{s}$, et les différences $x-y$, $y-z$, $z-x$ ne s'annulent pas sur $U$. On a :

$$\partial_1 V(x,y,z) = 2x - \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z}, \qquad \partial_2 V(x,y,z) = 2y - \frac{1}{y-x} - \frac{1}{y-z},$$
$$\partial_3 V(x,y,z) = 2z - \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y}.$$

Ainsi $\partial_1 V(\alpha,\beta,\gamma) = 0$ si et seulement si $2\alpha = \frac{(\alpha-\gamma)+(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$, ce qui équivaut, en multipliant par $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) \neq 0$, à $2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) = 2\alpha - \beta - \gamma$. On procède de même pour $\partial_2 V$ et $\partial_3 V$.

$$\boxed{(\alpha,\beta,\gamma) \text{ est un point critique de } V \iff (\alpha,\beta,\gamma) \text{ est solution de } (\mathcal{S}).}$$

**b)** On a $Q' = (X-\beta)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\beta)$ et $Q'' = 2((X-\alpha)+(X-\beta)+(X-\gamma))$. D'où $Q'(\alpha) = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$ et $Q''(\alpha) = 2(2\alpha-\beta-\gamma)$, puis

$$Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = 2\big[(2\alpha-\beta-\gamma) - 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\big].$$

Ainsi $\alpha$ est racine de $Q'' - 4XQ'$ si et seulement si la première équation de $(\mathcal{S})$ est vérifiée, et de même pour $\beta$ et $\gamma$, par symétrie des rôles.

$$\boxed{(\alpha,\beta,\gamma) \text{ solution de } (\mathcal{S}) \iff \alpha,\beta,\gamma \text{ sont racines de } Q'' - 4XQ'.}$$

**c)** Soit $(\alpha,\beta,\gamma)$ un point critique, et $R = Q'' - 4XQ' + 12Q$. Comme $Q = X^3 + \cdots$ et $XQ' = 3X^3 + \cdots$, le coefficient de $X^3$ dans $R$ est $-12+12 = 0$, donc $\deg R \leqslant 2$. Par a) et b), $R(\alpha) = Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) + 0 = 0$, et de même $R(\beta) = R(\gamma) = 0$. Le polynôme $R$, de degré au plus 2, a trois racines distinctes : il est nul.

$$\boxed{Q'' - 4XQ' = -12Q.}$$

Ainsi $Q$ est unitaire de degré 3 et vérifie $f(Q) = -4\cdot 3\, Q$ dans $\mathbb{R}_3[X]$. Par unicité (1d) :

$$\boxed{Q = H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X = X\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).}$$

Donc $\{\alpha,\beta,\gamma\} = \left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Réciproquement, si $(\alpha,\beta,\gamma)$ est une permutation de $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, il appartient à $U$, $Q = H_3$, et $Q'' - 4XQ' = -12Q$ s'annule en $\alpha,\beta,\gamma$. Par b) puis a), c'est un point critique.

$$\boxed{\text{Les points critiques de } V \text{ sont les 6 permutations de } \left(0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).}$$

## Problème : collecte de coupons

### Partie I – Résultats préliminaires

$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n$ ; loi de Gumbel : $F_Z(t) = \exp(-\exp(-t))$.

**Corrigé – Partie I.**

**1. Étude d'une suite.**

**a)** On accumule la somme des $\frac{1}{i}$ dans une variable `s`, puis on retranche $\ln n$ (on suppose `import numpy as np`).

```
def u(n):
    s = 0
    for i in range(1, n + 1):
        s = s + 1 / i
    return s - np.log(n)
```

**b)** On a $u_n - u_{n+1} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1/n}{1+1/n}$. Avec les développements limités en 0, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$ et $\frac{x}{1+x} = x - x^2 + \mathrm{o}(x^2)$, appliqués à $x = \frac{1}{n}$ :

$$u_n - u_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\boxed{u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.}$$

La série $\sum \frac{1}{2n^2}$ est une série de Riemann convergente, à termes positifs. Par comparaison de séries à termes positifs équivalents :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}(u_n - u_{n+1}) \text{ converge.}}$$

Or $\sum_{k=1}^{n-1}(u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_n$ (télescopage). La suite des sommes partielles converge, donc $(u_n)$ converge. On note $\gamma$ sa limite.

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers un réel } \gamma.}$$

**c)** $\sum \frac{1}{i^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$ : elle converge, c'est-à-dire que la suite de ses sommes partielles converge. On note $S = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$ ; on a $S \geqslant 1 > 0$.

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } S > 0.}$$

**2. Loi de Gumbel.**

**a)** $F_Z$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$), avec $F_Z'(t) = \mathrm{e}^{-t}\exp(-\mathrm{e}^{-t}) > 0$. Elle est donc croissante et continue sur $\mathbb{R}$ (en particulier continue à droite). Quand $t \to -\infty$, $\mathrm{e}^{-t} \to +\infty$, donc $F_Z(t) \to 0$. Quand $t \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-t} \to 0$, donc $F_Z(t) \to \exp(0) = 1$.

$$\boxed{F_Z \text{ est une fonction de répartition.}}$$

$F_Z$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ : $Z$ est à densité, et une densité s'obtient en dérivant.

$$\boxed{f_Z(t) = \mathrm{e}^{-t}\exp\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) = \exp\left(-t - \mathrm{e}^{-t}\right), \quad t \in \mathbb{R}.}$$

**b)** $W = \exp(-Z)$ est à valeurs dans $]0, +\infty[$, donc $F_W(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$. Pour $x > 0$, par stricte croissance de ln, $(W \leqslant x) = (-Z \leqslant \ln x) = (Z \geqslant -\ln x)$. Comme $\mathbb{P}(Z = -\ln x) = 0$ ($Z$ est à densité), on a $F_W(x) = 1 - F_Z(-\ln x) = 1 - \exp(-\mathrm{e}^{\ln x})$.

$$\boxed{F_W(x) = 0 \quad (x \leqslant 0), \qquad F_W(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \quad (x > 0).}$$

$$\boxed{W \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$

**c)** Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $g : x \mapsto |\ln x|^k \mathrm{e}^{-x}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

- En 0 : $\sqrt{x}\, g(x) \leqslant \sqrt{x} |\ln x|^k \to 0$ par croissances comparées, donc $g(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge (Riemann).
- En $+\infty$ : pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln x \leqslant x$, donc $x^2 g(x) \leqslant x^{k+2}\mathrm{e}^{-x} \to 0$ par croissances comparées. Ainsi $g(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge (Riemann).

Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} g$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (\ln x)^k \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x \text{ est absolument convergente.}}$$

**d)** $Z$ admet un moment d'ordre $k$ si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_Z(t)\, \mathrm{d}t$ converge absolument. L'application $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante, donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, avec $t = -\ln x$ et $\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$. Le changement de variable $x = \exp(-t)$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^k \mathrm{e}^{-t} \exp(-\mathrm{e}^{-t})\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} |\ln x|^k \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x,$$

et les deux intégrales sont de même nature. Par c), la première converge, donc $Z$ admet un moment d'ordre $k$. Le même changement de variable, sans valeur absolue, donne :

$$\boxed{\mathbb{E}(Z^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} \exp(-\mathrm{e}^{-t})\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (-\ln x)^k \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x.}$$

## Partie II – Étude de la variable $X_r$

$Y_i$ : nombre de pioches nécessaires pour obtenir $i$ boules distinctes ; $X_r = Y_r$.

**Corrigé – Partie II.**

**1. Étude du cas $r = 3$.**

**a)** On a $Y_2 > n$ si et seulement si les $n$ premières pioches ne fournissent qu'un seul numéro.

$$\boxed{(Y_2 > n) = C_n.}$$

$C_n$ est la réunion disjointe, pour $j \in \{1, 2, 3\}$, des événements « les $n$ premières pioches donnent $j$ », chacun de probabilité $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ par indépendance des pioches.

$$\boxed{\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(Y_2 > n) = 3 \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.}$$

On a $Y_2 \geqslant 2$. Pour $n \geqslant 2$, comme $(Y_2 > n-1) = (Y_2 = n) \cup (Y_2 > n)$ (réunion disjointe), on obtient $\mathbb{P}(Y_2 = n) = \mathbb{P}(Y_2 > n-1) - \mathbb{P}(Y_2 > n) = \frac{1}{3^{n-2}} - \frac{1}{3^{n-1}}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(Y_2 = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}, \qquad \text{i.e. } Y_2 - 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\tfrac{2}{3}\right).}$$

**b)** La famille $\big((Y_2 = k)\big)_{k\geqslant 2}$ est un système complet d'événements (par a), $\sum_{k\geqslant 2}\mathbb{P}(Y_2 = k) = 1$). Par la formule des probabilités totales associée à ce système, et puisque $(Y_3 - Y_2 = n) \cap (Y_2 = k) = (Y_3 = n + k) \cap (Y_2 = k)$ :

$$\boxed{\mathbb{P}(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big((Y_3 = n + k) \cap (Y_2 = k)\big).}$$

L'événement $(Y_3 = n + k) \cap (Y_2 = k)$ est réalisé si et seulement si, pour un couple $(a, b)$ de numéros distincts : les $k - 1$ premières pioches donnent $a$, la $k$-ième donne $b$, les pioches $k + 1, \dots, k + n - 1$ donnent $a$ ou $b$, et la $(k + n)$-ième donne le troisième numéro. Il y a $3 \times 2 = 6$ couples $(a, b)$, et ces événements sont disjoints. Par indépendance des pioches :

$$\mathbb{P}\big((Y_3 = n + k) \cap (Y_2 = k)\big) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3^k}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big((Y_3 = n + k) \cap (Y_2 = k)\big) = \frac{1}{3^{k-1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}.}$$

On somme, avec $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$ : $\mathbb{P}(Y_3 - Y_2 = n) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

$$\boxed{Y_3 - Y_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\tfrac{1}{3}\right).}$$

**2. Loi de $Y_{i+1} - Y_i$ pour $i \in \{1, \dots, r - 1\}$.**

**a)** Il faut au moins $i$ pioches pour obtenir $i$ numéros distincts, donc $Y_i \geqslant i$. Pour $k \geqslant i$, la suite de tirages « $k-i+1$ fois le numéro 1, puis $2, 3, \dots, i$ » est de probabilité non nulle et réalise $Y_i = k$. (L'événement « on n'obtient jamais $i$ numéros distincts » est inclus dans la réunion finie, sur les ensembles $A$ de $i - 1$ numéros, des événements « toutes les pioches sont dans $A$ », chacun de probabilité $\lim_m \left(\frac{i-1}{r}\right)^m = 0$ par le théorème de la limite monotone : il est négligeable.) Ensuite, $Y_{i+1} > Y_i$, car à l'instant $Y_i$ on n'a vu que $i$ numéros. Enfin, pour $n \geqslant 1$, la suite « $1, 2, \dots, i$, puis $n - 1$ fois 1, puis $i + 1$ » réalise $Y_{i+1} - Y_i = n$.

$$\boxed{Y_i(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, i - 1\}, \qquad (Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}.}$$

**b)** Soient $k \geqslant i$ et $n \geqslant 1$ ; on a $\mathbb{P}(Y_i = k) > 0$. Pour toute partie $A$ de $\{1, \dots, r\}$ à $i$ éléments, on note $B_A$ l'événement « $Y_i = k$ et l'ensemble des numéros obtenus aux $k$ premières pioches est $A$ ». $B_A$ ne dépend que des $k$ premières pioches, et $(Y_i = k)$ est la réunion disjointe des $B_A$. Or

$$B_A \cap (Y_{i+1} - Y_i = n) = B_A \cap (\text{pioches } k+1, \dots, k+n-1 \text{ dans } A) \cap (\text{pioche } k+n \notin A).$$

Par indépendance des pioches, $\mathbb{P}(B_A \cap (Y_{i+1} - Y_i = n)) = \mathbb{P}(B_A)\left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right)$.
En sommant sur $A$, $\mathbb{P}\big((Y_i = k) \cap (Y_{i+1} - Y_i = n)\big) = \mathbb{P}(Y_i = k)\left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right)$.

$$\boxed{\mathbb{P}_{(Y_i=k)}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right).}$$

**c)** Par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $((Y_i = k))_{k \geqslant i}$ :

$$\mathbb{P}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \sum_{k=i}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_i = k) \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

$$\boxed{Y_{i+1} - Y_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i), \qquad p_i = 1 - \frac{i}{r} = \frac{r-i}{r} \in ]0,1[.}$$

D'après le cours, $\mathbb{E} = \frac{1}{p_i}$ et $\mathbb{V} = \frac{1-p_i}{p_i^2} = \frac{i}{r} \cdot \frac{r^2}{(r-i)^2}$.

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r}{r-i}, \qquad \mathbb{V}(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{ri}{(r-i)^2}.}$$

**3. Espérance et variance de $X_r$.**

**a)** Par télescopage, $Y_r = Y_1 + \sum_{j=1}^{r-1}(Y_{j+1} - Y_j)$. On pose $j = r - i$, puis on utilise $Y_1 = 1$ et $X_r = Y_r$.

$$\boxed{X_r = 1 + \sum_{i=1}^{r-1}(Y_{r-i+1} - Y_{r-i}).}$$

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X_r) = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r}{i} = \frac{r}{r} + r\sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{i}$ (avec $\mathbb{E}(Y_{r-i+1} - Y_{r-i}) = \frac{r}{i}$). Par indépendance, la variance d'une somme est la somme des variances (la constante 1 ne compte pas) :

$$\mathbb{V}(X_r) = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r(r-i)}{i^2} = \sum_{i=1}^{r-1} \left(\frac{r^2}{i^2} - \frac{r}{i}\right),$$

et le terme d'indice $i = r$ de cette dernière somme vaut $1 - 1 = 0$, ce qui permet de l'ajouter.

$$\boxed{\mathbb{E}(X_r) = r\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}, \qquad \mathbb{V}(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} - r\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}.}$$

**b)** Par I.1, $\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} = \ln r + u_r$ avec $u_r \to \gamma$. Donc $\mathbb{E}(X_r) = r\ln r + \gamma r + r(u_r - \gamma)$, avec $r(u_r - \gamma) = \mathrm{o}(r)$. Ensuite, en notant $S_r = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\mathbb{V}(X_r)}{r^2} = S_r - \frac{\ln r}{r} - \frac{u_r}{r} \xrightarrow[r\to+\infty]{} S$$

(croissances comparées), et $S > 0$.

$$\boxed{\mathbb{E}(X_r) \underset{r\to+\infty}{=} r\ln r + \gamma r + \mathrm{o}(r), \qquad \mathbb{V}(X_r) \underset{r\to+\infty}{\sim} Sr^2,}$$

$$\boxed{\alpha = \gamma = \lim_{n\to+\infty} u_n, \qquad \beta = S = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}.}$$

## Partie III – Loi de $X_r$ et comportement asymptotique

$A_{k,m}$ : « le numéro $k$ n'a pas été pioché durant les $m$ premières pioches ».

**Corrigé – Partie III.**

**1. Loi de $X_r$.**

**a)** $A_{k,m}$ est l'intersection des événements « la $j$-ième pioche ne donne pas $k$ », pour $1 \leqslant j \leqslant m$, qui sont indépendants et de probabilité $1-\frac{1}{r}$. De même, $A_{i_1,m}\cap\cdots\cap A_{i_k,m}$ signifie que chacune des $m$ premières pioches donne un numéro hors de $\{i_1,\dots,i_k\}$, ce qui a lieu avec probabilité $\frac{r-k}{r}$ à chaque pioche.

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{k,m}) = \left(1-\frac{1}{r}\right)^m, \qquad \mathbb{P}(A_{i_1,m}\cap\cdots\cap A_{i_k,m}) = \left(1-\frac{k}{r}\right)^m.}$$

**b)** $X_r > m$ si et seulement si, à l'issue des $m$ premières pioches, au moins un numéro n'est pas encore sorti.

$$\boxed{(X_r > m) = A_{1,m}\cup\cdots\cup A_{r,m}.}$$

Par la formule du crible et a), chacune des $\binom{r}{k}$ intersections d'indices $i_1<\cdots<i_k$ ayant la même probabilité :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_r > m) = \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^m.}$$

Par II.2a), $X_r(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$. Pour $m \geqslant r$, on a $m-1 \geqslant 1$ et $\mathbb{P}(X_r = m) = \mathbb{P}(X_r > m-1) - \mathbb{P}(X_r > m)$. Or $\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m-1} - \left(1-\frac{k}{r}\right)^m = \frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m-1}$, $\frac{k}{r}\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k-1}$, et le terme $k=r$ est nul.

$$\boxed{\forall m \geqslant r, \quad \mathbb{P}(X_r = m) = \sum_{k=1}^{r-1}(-1)^{k-1}\binom{r-1}{k-1}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m-1}.}$$

**2. Comportement asymptotique de $X_r$ au-delà de sa moyenne.**

**a)** Pour $m=1$, c'est une égalité. Supposons le résultat vrai au rang $m$, et posons $B = D_1\cup\cdots\cup D_m$. Alors

$$\mathbb{P}(B\cup D_{m+1}) = \mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(D_{m+1})-\mathbb{P}(B\cap D_{m+1}) \leqslant \mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(D_{m+1}) \leqslant \sum_{j=1}^{m+1}\mathbb{P}(D_j).$$

$$\boxed{\mathbb{P}(D_1\cup\cdots\cup D_m) \leqslant \mathbb{P}(D_1)+\cdots+\mathbb{P}(D_m).}$$

**b)** Soit $g(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$. On a $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0,+\infty[$, donc $g$ atteint son minimum en 0, où $g(0)=0$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, \quad \exp(x) \geqslant 1+x.}$$

Avec $x = -\frac{1}{r}$, on obtient $0 \leqslant 1-\frac{1}{r} \leqslant \exp\left(-\frac{1}{r}\right)$. Par croissance de $s\mapsto s^m$ sur $\mathbb{R}_+$ :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{k,m}) = \left(1-\frac{1}{r}\right)^m \leqslant \exp\left(-\frac{m}{r}\right).}$$

**c)** $X_r$ est à valeurs entières. Si $X_r > M_r$, alors $X_r \geqslant M_r + 1 > (1+\varepsilon) r \ln r$. Réciproquement, si $X_r > (1+\varepsilon) r \ln r$, alors $X_r > M_r$, puisque $M_r \leqslant (1+\varepsilon) r \ln r$.

$$\boxed{(X_r > M_r) = \big(X_r > (1+\varepsilon) r \ln r\big).}$$

Comme $r \geqslant 2$, on a $(1+\varepsilon) r \ln r \geqslant 2 \ln 2 > 1$, donc $M_r \geqslant 1$. Par 1b), 2a) et 2b) :

$$\mathbb{P}\big(X_r > (1+\varepsilon) r \ln r\big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{r} A_{k,M_r}\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(A_{k,M_r}) \leqslant r \exp\left(-\frac{M_r}{r}\right).$$

Or $M_r > (1+\varepsilon) r \ln r - 1$, donc $-\frac{M_r}{r} < -(1+\varepsilon)\ln r + \frac{1}{r} \leqslant -(1+\varepsilon)\ln r + 1$, et, par croissance de exp, $r \exp\left(-\frac{M_r}{r}\right) \leqslant r \cdot \mathrm{e} \cdot r^{-(1+\varepsilon)}$.

$$\boxed{\mathbb{P}\big(X_r > (1+\varepsilon) r \ln r\big) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{r^{\varepsilon}}.}$$

Comme $r^{\varepsilon} \to +\infty$, le théorème d'encadrement donne la limite nulle annoncée.

**3. Distribution de $X_r$ autour de sa moyenne.**

**a)** On a $r \ln r + rt = r(\ln r + t) \to +\infty$ quand $r \to +\infty$, donc il existe $r_0(t) \geqslant 2$ tel que $r \ln r + rt \geqslant 1$ pour $r \geqslant r_0(t)$, et alors $m_r = \lfloor r \ln r + rt \rfloor \geqslant 1$. Ensuite, $r > 0$ donne $(Z_r > t) = (X_r > r \ln r + rt)$. Comme $X_r$ est à valeurs entières, on raisonne comme en 2c) : $X_r > r \ln r + rt \iff X_r \geqslant m_r + 1 \iff X_r > m_r$.

$$\boxed{\forall r \geqslant r_0(t), \quad m_r \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z_r > t) = \mathbb{P}(X_r > m_r).}$$

**b)** Pour $k = 0$, les deux membres sont nuls. Soit $k \geqslant 1$ et $r > k$. Par le développement limité $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$, on a $\ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = -\frac{k}{r} + \delta_r$, avec $r^2 \delta_r \to -\frac{k^2}{2}$. En particulier, $(r^2\delta_r)$ est bornée. On écrit $m_r = r \ln r + rt - \theta_r$ avec $\theta_r \in [0, 1[$ :

$$m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = -k \ln r - kt + \frac{k\theta_r}{r} + \frac{m_r}{r^2} \cdot r^2 \delta_r.$$

On a $0 \leqslant \frac{k\theta_r}{r} \leqslant \frac{k}{r} \to 0$, et $\frac{|m_r|}{r^2} \leqslant \frac{\ln r + |t|}{r} + \frac{1}{r^2} \to 0$ (croissances comparées). Le dernier terme est le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

$$\boxed{m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) \underset{r \to +\infty}{=} -k \ln r - kt + \mathrm{o}(1).}$$

**c)** Pour $r \geqslant k$, on a $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} = \frac{r^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{r}\right)$, et le produit de $k$ facteurs (vide si $k = 0$) tend vers 1.

$$\boxed{\binom{r}{k} \underset{r \to +\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}.}$$

Pour $r > k$, on a $1 - \frac{k}{r} > 0$, donc, par b) :

$$\binom{r}{k}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \binom{r}{k} \exp\left(m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right)\right) = \left(\frac{k!}{r^k}\binom{r}{k}\right) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{k!} \cdot \exp(\mathrm{o}(1)).$$

Le premier facteur tend vers 1, et le dernier aussi, par continuité de exp en 0.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{r \to +\infty} \binom{r}{k}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \frac{\exp(-kt)}{k!}.}$$

**d)** Pour $r \geqslant r_0(t)$, par a) et 1b), puisque le terme $k = r$ est nul ($m_r \geqslant 1$) :

$$\mathbb{P}(Z_r \leqslant t) = 1 - \mathbb{P}(X_r > m_r) = 1 - \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r}.$$

Par le résultat admis et la série exponentielle $\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$, appliquée à $x = -\mathrm{e}^{-t}$ :

$$\lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(Z_r \leqslant t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{e}^{-t})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{e}^{-t})^k}{k!} = \exp\left(-\mathrm{e}^{-t}\right).$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(Z_r \leqslant t) = F_Z(t).}$$

La fonction de répartition de $Z_r$ converge vers $F_Z$ en tout point (où $F_Z$ est continue). Par définition de la convergence en loi :

$$\boxed{Z_r = \frac{X_r - r\ln r}{r} \text{ converge en loi vers une variable de loi de Gumbel.}}$$