

ECRICOME

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2010

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : suites ; intégrales ; intégrales généralisées.</i>	2
2 Exercice 2	2
<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction ; fonctions de plusieurs variables ; Python.</i>	2
3 Problème : collecte de coupons	4
<i>Thèmes abordés : suites ; séries ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; Python.</i>	4

1 Exercice 1

Thèmes abordés : suites ; intégrales ; intégrales généralisées.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les intégrales

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} dt \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} du.$$

1. *Convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$*

a) Vérifier que, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in [0, 1[$,

$$\frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$?

b) En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. *Résultats intermédiaires*

a) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1}$.

b) Soit k un entier naturel non nul. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1} dx$.

c) On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - e^{2x}$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 appliquée à f , montrer que

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad \left| e^x - e^{2x} + x \right| \leq \frac{3x^2}{2}.$$

3. *Application*

a) En utilisant la question précédente, démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\left| v_n + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du \right| \leq \frac{3}{2n^2} \int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u} du.$$

b) On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du$, que l'on ne cherchera pas à calculer. Donner un équivalent de v_n , puis de $u_n - \frac{1}{2}$, en fonction de I .

2 Exercice 2

Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction ; fonctions de plusieurs variables ; Python.

Pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n . On considère l'application f qui, à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme

$$f(P) = P'' - 4XP'.$$

1. *Étude de f .* Soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

- Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Calculer $f(1)$, $f(X)$, puis $f(X^k)$ pour $k \in \{2, \dots, n\}$. Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.
- Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.
- Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ . Établir que $\lambda = -4 \deg(P)$. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que

$$(\mathcal{E}_n) : \quad f(H_n) = -4nH_n.$$

Rappel : un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.

2. *Étude de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$*

- En dérivant la relation $(\mathcal{E}_n)$, démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $f(H'_n) = -4(n-1)H'_n$. En déduire que

$$\forall n \geq 1, \quad H'_n = nH_{n-1}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{n-1}{4}H_{n-2} = 0.$$

- Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$? Calculer alors H_2 et H_3 .
- D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{n-1}{4}u_{n-2}.$$

Écrire un programme **Python** calculant u_{2010} .

3. *Application aux points critiques d'une fonction à trois variables*

On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq y, y \neq z, z \neq x\},$$

ainsi que la fonction V définie sur U par

$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|.$$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$.

- Établir que (α, β, γ) est un point critique de V si et seulement si (α, β, γ) est solution du système

$$(\mathcal{S}) : \quad \begin{cases} 2\alpha(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta) = 2\alpha - \beta - \gamma, \\ 2\beta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma, \\ 2\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 2\gamma - \alpha - \beta. \end{cases}$$

- On introduit le polynôme $Q(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$. Montrer que (α, β, γ) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $Q'' - 4XQ'$ admet pour racines α, β, γ .
- Prouver que si (α, β, γ) est un point critique de V , alors $Q'' - 4XQ' = -12Q$, puis que $Q = H_3$. Donner alors les points critiques de V .

3 Problème : collecte de coupons

Thèmes abordés : suites ; séries ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; Python.

Soit r un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient r boules numérotées $1, 2, \dots, r$. On pioche indéfiniment les boules avec remise, chaque boule pouvant être piochée de façon équiprobable.

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de pioches nécessaires pour obtenir i boules distinctes. On convient que $Y_1 = 1$. On désigne par X_r la variable aléatoire égale au nombre de pioches nécessaires pour obtenir les r boules numérotées $1, 2, \dots, r$; ainsi $X_r = Y_r$.

Par exemple, si $r = 4$ et si les boules piochées successivement portent les numéros

$$3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 4, 1, \dots,$$

on a $Y_1 = 1$, $Y_2 = 4$, $Y_3 = 8$ et $Y_4 = X_4 = 11$.

On note $\exp$ la fonction exponentielle définie par $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie I : Résultats préliminaires

1. *Étude d'une suite.* On introduit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n.$$

- a) Écrire un programme **Python** permettant de calculer u_n pour un entier $n \geq 1$ donné.
 - b) À l'aide d'un développement limité, justifier que $u_n - u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - u_{n+1})$, puis démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
 - c) Montrer que la suite $\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}\right)_{n \geq 1}$ converge (on ne demande pas le calcul de sa limite).
2. *Loi de Gumbel.* Soit Z une variable aléatoire à densité. On suppose que Z suit la loi de Gumbel, c'est-à-dire que sa fonction de répartition F_Z est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Z(t) = \exp(-\exp(-t)).$$

- a) Vérifier que F_Z est bien une fonction de répartition, puis que Z possède une densité que l'on précisera.
- b) On considère la variable aléatoire $W = \exp(-Z)$. Déterminer sa fonction de répartition. En déduire que W suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres.
- c) Pour tout entier k , montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln x)^k e^{-x} dx$ est absolument convergente.
- d) En justifiant le changement de variable $x = \exp(-t)$, démontrer que la variable Z admet un moment d'ordre k valant

$$\mathbb{E}(Z^k) = \int_0^{+\infty} (-\ln x)^k e^{-x} dx.$$

Partie II : Étude de la variable X_r

1. *Étude du cas $r = 3$.* On suppose uniquement dans cette question que $r = 3$.

- a) Soit n un entier naturel non nul. Comparer les événements $(Y_2 > n)$ et C_n : « les n premières pioches fournissent des boules portant toutes le même numéro ». Calculer $\mathbb{P}(C_n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y_2 > n)$ puis donner la loi de Y_2 .
- b) Justifier que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}((Y_3 = n+k) \cap (Y_2 = k)),$$

puis que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}((Y_3 = n+k) \cap (Y_2 = k)) = \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

En déduire la loi de $Y_3 - Y_2$.

2. Loi de $Y_{i+1} - Y_i$ pour $i \in \{1, 2, \dots, r-1\}$

- a) Justifier que

$$Y_i(\Omega) = \{i, i+1, i+2, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, i-1\} \quad \text{et} \quad (Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

- b) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq i$,

$$\mathbb{P}_{(Y_i=k)}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

- c) En déduire que $Y_{i+1} - Y_i$ suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres, puis établir que

$$\mathbb{E}(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r}{r-i} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{ri}{(r-i)^2}.$$

3. Espérance et variance de X_r

- a) Justifier que $X_r = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i})$. En admettant que les variables $Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, \dots, Y_r - Y_{r-1}$ sont indépendantes, vérifier que

$$\mathbb{E}(X_r) = r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{i^2} - r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i}.$$

- b) À l'aide de la question I.1, prouver l'existence de deux réels α et β tels que

$$\mathbb{E}(X_r) = r \ln r + \alpha r + o(r) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \beta r^2.$$

Partie III : Loi de X_r et déviation asymptotique par rapport à sa moyenne

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ et tout entier naturel $m \geq 1$, on considère l'événement $A_{k,m}$: « le numéro k n'a pas été pioché durant les m premières pioches ».

On rappelle la formule du crible de Poincaré : pour toute famille d'événements $(A_1, \dots, A_r)$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

1. Loi de X_r . Soit m un entier naturel non nul.

- a) Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, calculer successivement la probabilité de l'événement $A_{k,m}$, puis la probabilité de l'événement « k numéros n'ont pas été piochés au cours des m premières pioches ».

- b) Justifier que

$$\mathbb{P}(X_r > m) = \mathbb{P}(A_{1,m} \cup A_{2,m} \cup \dots \cup A_{r,m}),$$

puis, en utilisant la formule du crible de Poincaré, démontrer que

$$\mathbb{P}(X_r > m) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^m.$$

En déduire la loi de X_r .

2. Comportement asymptotique de X_r au-delà de sa moyenne

- a) À l'aide d'une récurrence sur m , montrer que, pour toute famille $(D_1, \dots, D_m)$ d'événements,

$$\mathbb{P}(D_1 \cup \dots \cup D_m) \leq \mathbb{P}(D_1) + \dots + \mathbb{P}(D_m).$$

- b) Démontrer que, pour tout réel x , $\exp(x) \geq 1 + x$. En déduire que

$$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, r\}, \quad \mathbb{P}(A_{k,m}) \leq \exp\left(-\frac{m}{r}\right).$$

- c) Soit $\varepsilon > 0$; on note $M_r = \lfloor (1 + \varepsilon)r \ln r \rfloor$. Comparer les événements « $X_r > M_r$ » et « $X_r > (1 + \varepsilon)r \ln r$ ». En déduire que

$$\mathbb{P}(X_r > (1 + \varepsilon)r \ln r) \leq \frac{e}{r^\varepsilon}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_r > (1 + \varepsilon)r \ln r) = 0$.

3. Distribution de X_r autour de sa moyenne. On introduit la suite $(Z_r)_{r \geq 2}$ de variables aléatoires définie par

$$\forall r \geq 2, \quad Z_r = \frac{X_r - r \ln r}{r}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. On note $m_r = \lfloor r \ln r + rt \rfloor$.

- a) Justifier l'existence d'un rang $r_0(t)$ tel que, pour tout $r \geq r_0(t)$, $m_r \geq 1$, puis prouver l'égalité

$$\forall r \geq r_0(t), \quad \mathbb{P}(Z_r > t) = \mathbb{P}(X_r > m_r).$$

- b) Soit k un entier naturel. À l'aide d'un développement limité, établir que

$$m_r \ln \left(1 - \frac{k}{r}\right) \underset{r \rightarrow +\infty}{=} -k \ln r - kt + o(1).$$

- c) Démontrer que, pour tout entier k , $\binom{r}{k} \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}$. En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \frac{\exp(-kt)}{k!}.$$

- d) En admettant que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\exp(-kt)}{k!},$$

exprimer la valeur de la limite $\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_r \leq t)$ en fonction de $F_Z(t)$, définie à la question

I.2. Quel résultat vient-on d'établir sur la suite de variables aléatoires $(Z_r)_{r \geq 2}$?