EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2010

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Minimum d'une fonction de n variables

$f_n(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)$ sur $U =]0,+\infty[^n$, $n \geqslant 2$.

Corrigé – Exercice 1.

Pour $x = (x_1,\dots,x_n) \in U$, on note $S(x) = \sum_{j=1}^n x_j$ et $T(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}$, de sorte que $f_n = ST$.

1. Régularité.

Les fonctions $x \mapsto x_j$ sont polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x_j}$ sont des fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur U, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Par somme, S et T sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, puis, par produit :

$$\boxed{f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U.}$$

2. Points critiques.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $x \in U$, on a $\partial_i S(x) = 1$ et $\partial_i T(x) = -\frac{1}{x_i^2}$, d'où

$$\partial_i f_n(x) = T(x) - \frac{S(x)}{x_i^2}.$$

Si x est un point critique, alors $x_i^2 = \frac{S(x)}{T(x)}$ pour tout i (avec $S(x) > 0, T(x) > 0$). Comme les x_i sont strictement positifs, $x_i = \sqrt{S(x)/T(x)}$ pour tout i : toutes les coordonnées sont égales.

Réciproquement, si $x = (a,\dots,a)$ avec $a > 0$, alors $S(x) = na$, $T(x) = \frac{n}{a}$ et $\partial_i f_n(x) = \frac{n}{a} - \frac{na}{a^2} = 0$ pour tout i.

$$\boxed{\text{Les points critiques de } f_n \text{ sont les points } (a,a,\dots,a),\ a \in]0,+\infty[\,.}$$

Il y en a une infinité.

3. Hessienne.

a) On dérive $\partial_i f_n = T - \frac{S}{x_i^2}$. Pour $j \neq i$, $\frac{S}{x_i^2}$ a pour dérivée partielle d'indice j la quantité $\frac{1}{x_i^2}$, donc

$$\partial^2_{j,i} f_n(x) = -\frac{1}{x_j^2} - \frac{1}{x_i^2}.$$

Pour $j = i$, la dérivée partielle d'indice i de $\frac{S}{x_i^2}$ vaut $\frac{1}{x_i^2} - \frac{2S}{x_i^3}$, donc

$$\partial^2_{i,i} f_n(x) = -\frac{1}{x_i^2} - \frac{1}{x_i^2} + \frac{2S(x)}{x_i^3}.$$

$$\boxed{\partial^2_{i,i} f_n(x) = \frac{2S(x)}{x_i^3} - \frac{2}{x_i^2}, \qquad \partial^2_{i,j} f_n(x) = -\frac{1}{x_i^2} - \frac{1}{x_j^2} \quad (i \neq j).}$$

b) Au point critique $(a, \dots, a)$, on a $S = na$, donc $\partial^2_{i,i} f_n = \frac{2na}{a^3} - \frac{2}{a^2} = \frac{2(n-1)}{a^2}$ et $\partial^2_{i,j} f_n = -\frac{2}{a^2}$ pour $i \neq j$. Or $K_n = nI_n - J_n$ a pour coefficients diagonaux $n-1$ et pour coefficients non diagonaux -1.

$$\boxed{H_n = \frac{2}{a^2} K_n.}$$

4. Valeurs propres.

a) Toutes les colonnes de J_n sont égales à la colonne non nulle v_n, donc $\operatorname{rg}(J_n) = 1$. Comme $1 < n$, J_n n'est pas inversible : 0 est valeur propre de J_n. Par le théorème du rang, $\dim \ker J_n = n - \operatorname{rg}(J_n) = n - 1$.

$$\boxed{\operatorname{rg}(J_n) = 1, \qquad 0 \in \operatorname{Sp}(J_n), \qquad \dim \ker J_n = n - 1.}$$

b) Chaque coefficient de $J_n v_n$ vaut $\sum_{j=1}^{n} 1 \times 1 = n$, donc $J_n v_n = n v_n$, avec $v_n \neq 0$.

$$\boxed{v_n \text{ est un vecteur propre de } J_n \text{ associé à la valeur propre } n.}$$

c) Les sous-espaces propres $\ker J_n$ et $\ker(J_n - nI_n)$ ont des dimensions respectives $n-1$ et au moins 1. La somme des dimensions des sous-espaces propres de J_n est majorée par n ; s'il existait une autre valeur propre, cette somme serait au moins $n+1$. Donc $\operatorname{Sp}(J_n) = \{0, n\}$ et $\ker(J_n - nI_n) = \operatorname{Vect}(v_n)$.
Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathbb{R}$, $J_n X = \mu X$ équivaut à $K_n X = (n - \mu) X$: K_n et J_n ont les mêmes vecteurs propres, et les valeurs propres de K_n sont les $n - \mu$, $\mu \in \operatorname{Sp}(J_n)$.

$$\boxed{\operatorname{Sp}(J_n) = \{0, n\}, \qquad \operatorname{Sp}(K_n) = \{n, 0\},}$$

avec $\ker K_n = \operatorname{Vect}(v_n)$ et $\ker(K_n - nI_n) = \ker J_n$, de dimension $n-1$.

d) Par 3b), la hessienne en un point critique est $H_n = \frac{2}{a^2} K_n$, dont les valeurs propres sont $\frac{2n}{a^2} > 0$ et 0. Le critère d'ordre 2 conclut à un extremum local lorsque les valeurs propres de la hessienne sont toutes strictement positives (ou toutes strictement négatives), et à l'absence d'extremum lorsqu'elle possède deux valeurs propres de signes strictement opposés. Ici, $\operatorname{Sp}(H_n) = \left\{0, \frac{2n}{a^2}\right\}$: on n'est dans aucun de ces deux cas.

$$\boxed{\text{La hessienne admet la valeur propre 0 : on ne peut pas conclure de cette façon.}}$$

5. Cas $n = 2$.

a) $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$.

$$\boxed{(x_1 + x_2)^2 \geqslant 4x_1x_2, \text{ avec égalité si et seulement si } x_1 = x_2.}$$

b) Pour $(x_1, x_2) \in]0, +\infty[^2$, on a $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$, donc, par a) et puisque $x_1x_2 > 0$,

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2} \geqslant 4,$$

et $f_2(1, 1) = 2 \times 2 = 4$.

$$\boxed{f_2 \text{ admet un minimum global égal à } 4.}$$

Il est atteint exactement aux points (a, a), $a > 0$ (cas d'égalité de a)).

6. Cas général.

Soit $x \in U$. On considère les vecteurs $u = (\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$ et $w = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$ de $\mathbb{R}^n$. On a

$$\langle u, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}} = n, \qquad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \|w\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle u, w\rangle^2 \leqslant \|u\|^2\|w\|^2$, soit $n^2 \leqslant f_n(x)$. De plus, $f_n(1, \ldots, 1) = n \times n = n^2$.

$$\boxed{f_n \text{ admet sur } U \text{ un minimum global égal à } n^2.}$$

Le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz (u et w colinéaires, soit $x_i = c$ pour tout i) montre que ce minimum est atteint exactement aux points critiques $(a, \ldots, a)$.

Exercice 2

Exercice 2 – Un endomorphisme symétrique

$\|u\| = 1$, $\lambda \neq 0$, $f_\lambda(x) = \lambda(x/u)u + x$.

Corrigé – Exercice 2.

1. Dimension de $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$**.**

Comme $\|u\| = 1$, $u \neq 0$, donc $\dim \mathrm{Vect}(u) = 1$. Dans l'espace euclidien E, $\dim F^\perp = n - \dim F$ pour tout sous-espace F.

$$\boxed{\dim (\mathrm{Vect}(u))^\perp = n - 1.}$$

2. Endomorphisme.

f_λ va de E dans E. Pour $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, par linéarité du produit scalaire à gauche,

$$f_\lambda(\alpha x + y) = \lambda\big(\alpha(x/u) + (y/u)\big)u + \alpha x + y = \alpha f_\lambda(x) + f_\lambda(y).$$

$$\boxed{f_\lambda \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

3. Polynôme annulateur.

On a $f_\lambda(u) = \lambda(u/u)u + u = (\lambda + 1)u$, car $(u/u) = \|u\|^2 = 1$. Pour $x \in E$, par linéarité

de f_λ,

$$f_\lambda^2(x) = f_\lambda(\lambda(x/u)u + x) = \lambda(x/u)(\lambda+1)u + \lambda(x/u)u + x = \lambda(\lambda+2)(x/u)u + x.$$

Par ailleurs,

$$(\lambda+2)f_\lambda(x) - (\lambda+1)x = \lambda(\lambda+2)(x/u)u + (\lambda+2)x - (\lambda+1)x = \lambda(\lambda+2)(x/u)u + x.$$

Ainsi $f_\lambda^2 - (\lambda+2)f_\lambda + (\lambda+1)\mathrm{Id} = 0$.

$$\boxed{X^2 - (\lambda+2)X + (\lambda+1) \text{ est un polynôme annulateur de } f_\lambda.}$$

4. Éléments propres.

a) Pour $x, y \in E$, par symétrie du produit scalaire,

$$(f_\lambda(x)/y) = \lambda(x/u)(u/y) + (x/y) = \lambda(x/u)(y/u) + (x/y),$$

expression symétrique en x et y ; elle est donc égale à $(f_\lambda(y)/x) = (x/f_\lambda(y))$.

$$\boxed{f_\lambda \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$$

b) On a vu que $f_\lambda(u) = (\lambda+1)u$. Si $v \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp$, alors $(v/u) = 0$, donc $f_\lambda(v) = v$.

$$\boxed{f_\lambda(u) = (\lambda+1)u, \qquad \forall v \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp,\ f_\lambda(v) = v.}$$

c) On a $X^2 - (\lambda+2)X + (\lambda+1) = (X-1)\big(X - (\lambda+1)\big)$. Les valeurs propres de f_λ sont donc parmi les racines 1 et $\lambda+1$ de ce polynôme annulateur, distinctes car $\lambda \neq 0$.
Par b), $u \neq 0$ est vecteur propre associé à $\lambda+1$. Comme $n \geqslant 2$, $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ est de dimension $n-1 \geqslant 1$ et contient un vecteur $v \neq 0$, qui vérifie $f_\lambda(v) = v$: 1 est valeur propre. Ainsi $\mathrm{Sp}(f_\lambda) = \{1, \lambda+1\}$, avec

$$\mathrm{Vect}(u) \subset \ker\big(f_\lambda - (\lambda+1)\mathrm{Id}\big), \qquad (\mathrm{Vect}(u))^\perp \subset \ker(f_\lambda - \mathrm{Id}).$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres est au plus n, et les deux sous-espaces de gauche ont des dimensions de somme $1 + (n-1) = n$. Les inclusions sont donc des égalités.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f_\lambda) = \{1, \lambda+1\}}$$

$$\boxed{\ker\big(f_\lambda - (\lambda+1)\mathrm{Id}\big) = \mathrm{Vect}(u), \qquad \ker(f_\lambda - \mathrm{Id}) = (\mathrm{Vect}(u))^\perp.}$$

5. Cas $\lambda = -1$.

a) Pour $\lambda = -1$, le polynôme annulateur de la question 3 devient $X^2 - X$, donc $f_{-1}^2 = f_{-1}$.

$$\boxed{f_{-1} \text{ est un projecteur.}}$$

b) Pour un projecteur, $E = \ker(f_{-1}) \oplus \mathrm{Im}(f_{-1})$ avec $\mathrm{Im}(f_{-1}) = \ker(f_{-1} - \mathrm{Id})$. Par 4c) avec $\lambda + 1 = 0$:

$$\mathrm{Im}(f_{-1}) = \ker(f_{-1} - \mathrm{Id}) = (\mathrm{Vect}(u))^\perp, \qquad \ker(f_{-1}) = \mathrm{Vect}(u).$$

Ainsi f_{-1} est le projecteur sur $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u) = \big((\mathrm{Vect}(u))^\perp\big)^\perp$: c'est un projecteur orthogonal. Explicitement, $f_{-1}(x) = x - (x/u)u$.

$$\boxed{f_{-1} \text{ est le projecteur orthogonal sur } (\mathrm{Vect}(u))^\perp.}$$

Exercice 3

Exercice 3 – Écart entre deux lois uniformes

X, Y indépendantes de loi uniforme sur $[0,a[$, $Z=|X-Y|$.

Corrigé – Exercice 3.

1. Loi de $X-Y$.

a) Une densité de Y est $f_Y=\frac{1}{a}\mathbf{1}_{[0,a[}$. Par la formule de densité d'une transformation affine, $-Y=(-1)Y+0$ admet pour densité $x\mapsto\frac{1}{|-1|}f_Y(-x)$, et $-x\in[0,a[$ équivaut à $x\in]-a,0]$.

$$\boxed{f_{-Y}(x)=\frac{1}{a}\ \text{ si } x\in]-a,0]\,,\qquad f_{-Y}(x)=0\ \text{ sinon.}}$$

b) X et $-Y$ sont indépendantes (car X et Y le sont), à densité, et $f_X=\frac{1}{a}\mathbf{1}_{[0,a[}$ est bornée. Par le théorème de convolution, $X-Y=X+(-Y)$ admet pour densité

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(t)f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrande vaut $\frac{1}{a^2}$ si $t\in[0,a[$ et $x-t\in]-a,0]$, c'est-à-dire si $t\in[0,a[\cap[x,x+a[$, et 0 sinon. Donc $g(x)$ est $\frac{1}{a^2}$ fois la longueur de $[0,a[\cap[x,x+a[$.

- Si $x\leqslant -a$ ou $x\geqslant a$, l'intersection est vide (ou réduite à un point) : $g(x)=0$.
- Si $-a\leqslant x\leqslant 0$, l'intersection est $[0,x+a[$: $g(x)=\frac{x+a}{a^2}=\frac{a-|x|}{a^2}$.
- Si $0\leqslant x\leqslant a$, l'intersection est $[x,a[$: $g(x)=\frac{a-x}{a^2}=\frac{a-|x|}{a^2}$.

$$\boxed{g(x)=\frac{a-|x|}{a^2}\ \text{ si } x\in[-a,a],\qquad g(x)=0\ \text{ sinon.}}$$

2. Loi de Z.

a) Si $x<0$, $[Z\leqslant x]=\emptyset$, car $Z\geqslant 0$. Si $x\geqslant 0$, $[Z\leqslant x]=[-x\leqslant X-Y\leqslant x]$, donc

$$H(x)=\mathbb{P}(X-Y\leqslant x)-\mathbb{P}(X-Y<-x)=G(x)-G(-x),$$

car $\mathbb{P}(X-Y=-x)=0$, puisque $X-Y$ est à densité.

$$\boxed{H(x)=0\ \text{ si } x<0,\qquad H(x)=G(x)-G(-x)\ \text{ si } x\geqslant 0.}$$

b) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (elle s'annule en $\pm a$), donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $G'=g$. Ainsi H est continue sur $\mathbb{R}$ (en 0, $G(0)-G(0)=0$), et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de 0, avec $H'(x)=0$ pour $x<0$ et, pour $x>0$, $H'(x)=g(x)+g(-x)=2g(x)$, car g est paire. On obtient une densité de Z en dérivant H là où elle est dérivable, et en donnant une valeur arbitraire en 0 :

$$\boxed{h(x)=\frac{2(a-x)}{a^2}\ \text{ si } x\in[0,a],\qquad h(x)=0\ \text{ sinon.}}$$

3. Espérance et variance.

La densité h est nulle hors du segment $[0,a]$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2h(x)\,\mathrm{d}x$ convergent (ce sont des intégrales sur $[0,a]$ de fonctions continues). Ainsi Z admet un moment d'ordre 2, donc une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{2}{a^2}\int_0^a (ax - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{a}{3},$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \frac{2}{a^2}\int_0^a (ax^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^2}{6}.$$

Par la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(Z) = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9}$.

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{a}{3}, \qquad \mathbb{V}(Z) = \frac{a^2}{18}.}$$

4. Simulation.

Si U suit la loi uniforme sur $[0,1[$, aU suit la loi uniforme sur $[0,a[$ (transformation affine). Deux appels successifs à `rd.random()` donnent deux simulations indépendantes de X et Y, et l'on renvoie la valeur absolue de leur différence.

```
def z(a):
    x = a * rd.random()
    y = a * rd.random()
    return np.abs(x - y)
```

Problème – Partie I – Préliminaire

Problème, partie I – Un encadrement de $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$

Comparaison série-intégrale pour $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Corrigé – Problème, partie I.

1. Comparaison série-intégrale.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[k,k+1]$, donc $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $t \in [k,k+1]$. Par croissance de l'intégrale sur ce segment de longueur 1 :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.}$$

b) Soit $n \geqslant 2$. On somme les inégalités de a) pour k de 1 à $n-1$, et on applique la relation de Chasles. Le changement d'indice $j = k+1$ donne $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}}$.

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.}$$

2. Encadrement.

On a $\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^n = 2\sqrt{n} - 2$. Soit $n \geqslant 2$. L'inégalité de gauche de 1b) donne $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1$. L'inégalité de droite donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2\sqrt{n} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2\sqrt{n} - 2.$$

Pour $n = 1$, la somme vaut 1, et $2\sqrt{1} - 2 = 0 \leqslant 1 \leqslant 1 = 2\sqrt{1} - 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\sqrt{n} - 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1.}$$

Problème – Partie II – Convergence complète

Problème, partie II – Convergence complète et convergence en probabilité

(X_n) converge complètement vers X si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)$ converge.

Corrigé – Problème, partie II.

1. Convergence complète implique convergence en probabilité.

Soit $\varepsilon > 0$. La série de terme général $\mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)$ converge, donc son terme général tend vers 0 : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$. Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a, par définition :

$$\boxed{(X_n) \text{ converge en probabilité vers } X.}$$

2. Un contre-exemple à la réciproque.

a) Y_n suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{n}$, et $Y_n(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $\mathbb{P}(Y_n \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - e^{-1/n}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(Y_n \geqslant 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}.}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme Y_n prend des valeurs entières, si $Y_n(\omega) \geqslant \varepsilon > 0$, alors $Y_n(\omega) \geqslant 1$. Ainsi $[Y_n \geqslant \varepsilon] \subset [Y_n \geqslant 1]$, et par a) :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leqslant \mathbb{P}(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 1 - e^{-\frac{1}{n}}.}$$

c) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $Y_n \geqslant 0$, $\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n \geqslant \varepsilon)$. Par continuité de l'exponentielle en 0, $1 - e^{-1/n} \to 0$. Par le théorème d'encadrement, $\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geqslant \varepsilon) \to 0$.

$$\boxed{(Y_n) \text{ converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.}}$$

d) Prenons $\varepsilon = 1$. On a $\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geqslant 1) = 1 - e^{-1/n}$. Comme $e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$ et $-\frac{1}{n} \to 0$, on a $1 - e^{-1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Les séries à termes positifs $\sum \left(1 - e^{-1/n}\right)$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont

donc de même nature, et la série harmonique diverge. La série de terme général $\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geqslant 1)$ diverge donc.

$\boxed{(Y_n) \text{ ne converge pas complètement vers la variable certaine nulle.}}$

La réciproque de la question 1 est donc fausse.

Problème – Partie III – Étude d'un exemple

Problème, partie III – Une somme de variables de Bernoulli

$B_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ deux à deux indépendantes, $S_n = \sum_{k=1}^n B_k$, $Z_n = \frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$.

Corrigé – Problème, partie III.

1. Espérance et variance de S_n.

a) On a $\mathbb{E}(B_k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\mathbb{V}(B_k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k}$. Par linéarité de l'espérance, on obtient $\mathbb{E}(S_n)$. Pour la variance,

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(B_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(B_i, B_j),$$

et les covariances sont nulles, puisque les B_k sont deux à deux indépendantes.

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k}\right).}$$

b) $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{E}(S_n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, avec $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant 0$.

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) \leqslant \mathbb{E}(S_n).}$$

2. Convergence en probabilité.

a) Soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathbb{E}(S_n) \geqslant 1 > 0$ et $Z_n - 1 = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{E}(S_n)}$, donc $[|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon] = [|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \varepsilon \mathbb{E}(S_n)]$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis par 1b),

$$\mathbb{P}(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(S_n)^2} \leqslant \frac{\mathbb{E}(S_n)}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(S_n)^2}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(S_n)}.}$$

b) Par le préliminaire, $\mathbb{E}(S_n) \geqslant 2\sqrt{n} - 2 \to +\infty$, donc $\frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(S_n)} \to 0$. Par le théorème d'encadrement, $\mathbb{P}(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \to 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

$\boxed{(Z_n) \text{ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.}}$

3. La sous-suite (Z_{n^4}).

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geqslant 2$, le préliminaire donne $\mathbb{E}(S_{n^4}) \geqslant 2\sqrt{n^4} - 2 = 2n^2 - 2 \geqslant n^2$ (car $n^2 \geqslant 2$). Par 2a),

$$0 \leqslant \mathbb{P}(|Z_{n^4} - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(S_{n^4})} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}.$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(|Z_{n^4} - 1| \geqslant \varepsilon) \text{ converge.}}$$

4. Encadrement de Z_n.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $e_n \geqslant 1$ et $e_n^4 \leqslant n < (e_n+1)^4$. Comme les B_k sont positives, la suite $(S_m)_m$ est croissante : $S_{e_n^4} \leqslant S_n \leqslant S_{(e_n+1)^4}$. De même, $m \mapsto \mathbb{E}(S_m) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}}$ est croissante et strictement positive : $0 < \mathbb{E}(S_{e_n^4}) \leqslant \mathbb{E}(S_n) \leqslant \mathbb{E}(S_{(e_n+1)^4})$. Comme $S_{e_n^4} \geqslant 0$,

$$Z_n = \frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} \geqslant \frac{S_{e_n^4}}{\mathbb{E}(S_n)} \geqslant \frac{S_{e_n^4}}{\mathbb{E}(S_{(e_n+1)^4})}, \qquad Z_n \leqslant \frac{S_{(e_n+1)^4}}{\mathbb{E}(S_n)} \leqslant \frac{S_{(e_n+1)^4}}{\mathbb{E}(S_{e_n^4})}.$$

$$\boxed{\frac{S_{e_n^4}}{\mathbb{E}\left(S_{(e_n+1)^4}\right)} \leqslant Z_n \leqslant \frac{S_{(e_n+1)^4}}{\mathbb{E}\left(S_{e_n^4}\right)}.}$$

b) Par définition, $S_{e_n^4} = \mathbb{E}(S_{e_n^4}) Z_{e_n^4}$ et $S_{(e_n+1)^4} = \mathbb{E}(S_{(e_n+1)^4}) Z_{(e_n+1)^4}$. On reporte dans a).

$$\boxed{\frac{\mathbb{E}\left(S_{e_n^4}\right)}{\mathbb{E}\left(S_{(e_n+1)^4}\right)} Z_{e_n^4} \leqslant Z_n \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(S_{(e_n+1)^4}\right)}{\mathbb{E}\left(S_{e_n^4}\right)} Z_{(e_n+1)^4}.}$$

5. Conclusion.

On note $\rho_n = \dfrac{\mathbb{E}\left(S_{(e_n+1)^4}\right)}{\mathbb{E}\left(S_{e_n^4}\right)}$. Par croissance de $m \mapsto \mathbb{E}(S_m)$, on a $\rho_n \geqslant 1$.

a) On a $e_n > n^{1/4} - 1$, donc $e_n \to +\infty$. Pour n tel que $e_n \geqslant 2$, le préliminaire, appliqué à $(e_n+1)^4$ et à e_n^4, donne

$$1 \leqslant \rho_n \leqslant \frac{2(e_n+1)^2 - 1}{2e_n^2 - 2}.$$

Or $\frac{2(m+1)^2-1}{2m^2-2} = \frac{2+\frac{4}{m}+\frac{1}{m^2}}{2-\frac{2}{m^2}} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Comme $e_n \to +\infty$, ce majorant tend vers 1, et par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(S_{(e_n+1)^4}\right)}{\mathbb{E}\left(S_{e_n^4}\right)} = 1.}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. On a $\rho_n \to 1 < 1 + \varepsilon$, et $\frac{1}{\rho_n} \to 1 > \frac{2+\varepsilon}{2+2\varepsilon}$ (car $2 + \varepsilon < 2 + 2\varepsilon$). Par définition de la limite, il existe un rang N_ε tel que, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$:

$$\boxed{\frac{\mathbb{E}\left(S_{(e_n+1)^4}\right)}{\mathbb{E}\left(S_{e_n^4}\right)} \leqslant 1 + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathbb{E}\left(S_{e_n^4}\right)}{\mathbb{E}\left(S_{(e_n+1)^4}\right)} \geqslant \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.}$$

c) Soit $\varepsilon > 0$ et $n \geqslant N_\varepsilon$. Par 4b), on a $\frac{1}{\rho_n} Z_{e_n^4} \leqslant Z_n \leqslant \rho_n Z_{(e_n+1)^4}$.

- Soit $\omega \in [Z_n \leqslant 1-\varepsilon]$. Si $\varepsilon > 1$, cet événement est vide, car $Z_n \geqslant 0 > 1-\varepsilon$. Si $\varepsilon \leqslant 1$, alors $\frac{1}{\rho_n} Z_{e_n^4}(\omega) \leqslant 1-\varepsilon$, donc, comme $1-\varepsilon \geqslant 0$ et $\rho_n \leqslant 1+\varepsilon$,

$$Z_{e_n^4}(\omega) \leqslant \rho_n(1-\varepsilon) \leqslant (1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = 1-\varepsilon^2.$$

- Soit $\omega \in [Z_n \geqslant 1+\varepsilon]$. Alors $\rho_n Z_{(e_n+1)^4}(\omega) \geqslant 1+\varepsilon$, donc, par la seconde inégalité de b),

$$Z_{(e_n+1)^4}(\omega) \geqslant \frac{1+\varepsilon}{\rho_n} \geqslant (1+\varepsilon)\frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} = 1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\boxed{[Z_n \leqslant 1-\varepsilon] \subset \left[Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2\right] \qquad \text{et} \qquad [Z_n \geqslant 1+\varepsilon] \subset \left[Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right].}$$

d) Soit $\varepsilon > 0$ et $n \geqslant N_\varepsilon$. On a $[|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon] = [Z_n \leqslant 1-\varepsilon] \cup [Z_n \geqslant 1+\varepsilon]$, donc, par c),

$$[|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon] \subset \left[\left|Z_{(e_n+1)^4} - 1\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[\left|Z_{e_n^4} - 1\right| \geqslant \varepsilon^2\right].$$

Comme $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$:

$$\boxed{\mathbb{P}(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|Z_{(e_n+1)^4} - 1\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|Z_{e_n^4} - 1\right| \geqslant \varepsilon^2\right).}$$

e) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_m = \left[|Z_{m^4} - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[|Z_{m^4} - 1| \geqslant \varepsilon^2\right],$$
$$a_m = \mathbb{P}\left(|Z_{m^4} - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|Z_{m^4} - 1| \geqslant \varepsilon^2\right).$$

Par la question 3, appliquée avec $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ et $\varepsilon^2 > 0$, la série $\sum a_m$ converge. On note $R_p = \sum_{m=p}^{+\infty} a_m$; on a $R_p \to 0$ quand $p \to +\infty$ (reste d'une série convergente).
Soit $N \geqslant N_\varepsilon$. Pour $n \geqslant N$, on a $e_n \geqslant e_N$ (la partie entière est croissante), et l'inclusion obtenue en d) donne $[|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon] \subset A_{e_n} \cup A_{e_n+1}$. Ainsi

$$\bigcup_{n \geqslant N} [|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon] \subset \bigcup_{m \geqslant e_N} A_m.$$

On pose $C_{e_N} = A_{e_N}$ et, pour $m > e_N$, $C_m = A_m \setminus (A_{e_N} \cup \cdots \cup A_{m-1})$. Les C_m sont deux à deux incompatibles, de même réunion que les A_m, et $C_m \subset A_m$. Par σ-additivité, puis par $\mathbb{P}(A_m) \leqslant a_m$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m \geqslant e_N} A_m\right) = \sum_{m=e_N}^{+\infty} \mathbb{P}(C_m) \leqslant \sum_{m=e_N}^{+\infty} a_m = R_{e_N}.$$

D'où $0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant N} [|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant R_{e_N}$ pour tout $N \geqslant N_\varepsilon$. Comme $e_N \to +\infty$, on a $R_{e_N} \to 0$, et par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant N} [|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon]\right) = 0.}$$