

emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2010

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Problème 1

Problème 1 – Partie I – Résultats généraux sur les matrices stochastiques

$A \in \mathcal{ST}_p$ si et seulement si $(A)_{i,j} \geq 0$ pour tous i, j et $\sum_{j=1}^p (A)_{i,j} = 1$ pour tout i ;
 $V = {}^t(1, \dots, 1)$.

Corrigé – Problème 1 – Partie I.

1. Caractérisation et valeur propre commune.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, la i -ème coordonnée de AV est

$$(AV)_i = \sum_{j=1}^p (A)_{i,j} \times 1 = \sum_{j=1}^p (A)_{i,j}.$$

Ainsi, $AV = V$ si et seulement si $\sum_{j=1}^p (A)_{i,j} = 1$ pour tout i . La condition de positivité des coefficients étant commune aux deux membres :

$$A \in \mathcal{ST}_p \iff \left(\forall (i, j), (A)_{i,j} \geq 0 \text{ et } AV = V \right).$$

b) Pour tout $A \in \mathcal{ST}_p$, on a $AV = 1 \cdot V$ avec $V \neq 0$: V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

Toute matrice de $\mathcal{ST}_p$ admet 1 pour valeur propre (vecteur propre V).

2. Stabilité par produit.

Soient $A, B \in \mathcal{ST}_p$. Pour tous i, j , $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^p (A)_{i,k} (B)_{k,j} \geq 0$ comme somme de produits de réels positifs. De plus, par 1a), $(AB)V = A(BV) = AV = V$. Par 1a) à nouveau :

$$\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p.$$

3. Exemples.

a) A_1 est triangulaire inférieure : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. La matrice $A_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède donc 3 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable. Chaque sous-espace propre est de dimension au moins 1 et la somme des trois dimensions vaut 3 : chacun est de dimension 1.

$$A_1 \text{ est diagonalisable et } \dim \text{Ker}(A_1 - I_3) = 1.$$

b) Les matrices A_2 et A_3 ont des coefficients positifs et des sommes de lignes égales à 1 : $A_2, A_3 \in \mathcal{ST}_3$.

i) A_3 est triangulaire, donc $\text{Sp}(A_3) = \{1, \frac{1}{2}\}$. Pour $X = {}^t(x, y, z)$:

$$(A_3 - \frac{1}{2}I_3)X = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x = 0 \\ \frac{1}{2}x = 0 \\ \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0,$$

$$(A_3 - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$$

Ainsi $\text{Ker}(A_3 - \frac{1}{2}I_3) = \text{Vect}({}^t(0, 0, 1))$ et $\text{Ker}(A_3 - I_3) = \text{Vect}({}^t(1, 1, 1))$: la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $2 < 3$.

$A_3 \in \mathcal{ST}_3$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

ii) Pour $X = {}^t(x, y, z)$, $(A_2 - I_3)X = 0 \iff -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \iff y = z$. Donc

$$\text{Ker}(A_2 - I_3) = \text{Vect}({}^t(1, 0, 0), {}^t(0, 1, 1)),$$

et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : ce sous-espace propre est de dimension 2.

L'affirmation est fausse : contre-exemple $A_2 \in \mathcal{ST}_3$, $\dim \text{Ker}(A_2 - I_3) = 2$.

4. Majoration des valeurs propres réelles.

a) La i -ème ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ s'écrit $\lambda x_i = \sum_{k=1}^p (A)_{i,k} x_k$. Par l'inégalité triangulaire, comme $(A)_{i,k} \geq 0$ et $|x_k| \leq |x_i|$:

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{k=1}^p (A)_{i,k} |x_k| \leq |x_i| \sum_{k=1}^p (A)_{i,k} = |x_i|.$$

$$|\lambda x_i| \leq |x_i|.$$

b) Si $x_i = 0$, alors $|x_k| \leq 0$ pour tout k , donc $X = 0$, ce qui est exclu pour un vecteur propre. Ainsi $|x_i| > 0$, et l'on divise $|\lambda| |x_i| \leq |x_i|$ par $|x_i|$.

$$|\lambda| \leq 1.$$

Problème 1 – Partie II – Moyennes de puissances

$A \in \mathcal{ST}_p$, $A = PDP^{-1}$, $(D)_{i,i} = 1$ si $i \leq r$, $(D)_{i,i} \neq 1$ si $i \geq r+1$; $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k$, $B_n = PM_nP^{-1}$, $B = P\Delta P^{-1}$.

Corrigé – Problème 1 – Partie II.

1. Puissances et moyennes.

- a) Par récurrence. $A^0 = I_p$ a des coefficients positifs (0 ou 1) et chaque ligne contient un seul 1 : $A^0 \in \mathcal{ST}_p$. Si $A^n \in \mathcal{ST}_p$, alors $A^{n+1} = A^n A \in \mathcal{ST}_p$ par I.2.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \mathcal{ST}_p.}$$

- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k$. Ses coefficients sont des sommes de réels positifs multipliées par $\frac{1}{n} > 0$, donc positifs. Par 1a) et I.1a), $A^k V = V$ pour tout k , d'où

$$C_n V = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k V = \frac{1}{n} \cdot nV = V.$$

Par I.1a) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p.}$$

2. Une limite de moyennes.

Si $x = 1$, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = \frac{n}{n} = 1$. Si $x \neq 1$ et $|x| \leq 1$, alors $x \in [-1, 1[$, et la somme géométrique donne

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right| = \frac{|1 - x^n|}{n(1 - x)} \leq \frac{1 + |x|^n}{n(1 - x)} \leq \frac{2}{n(1 - x)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}}$$

3. Convergence de (M_n) et de (B_n) .

Notons $d_i = (D)_{i,i}$ et E_i la i -ème colonne de I_p . Le vecteur $X_i = P E_i$ est non nul (P inversible) et

$$A X_i = P D P^{-1} P E_i = P D E_i = d_i P E_i = d_i X_i.$$

Donc d_i est une valeur propre réelle de A et, par I.4b), $|d_i| \leq 1$. Comme $D^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_p^k)$, la matrice M_n est diagonale, de coefficients diagonaux $(M_n)_{i,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d_i^k$. Par 2, $(M_n)_{i,i} \rightarrow 1$ si $i \leq r$ (car $d_i = 1$) et $(M_n)_{i,i} \rightarrow 0$ si $i \geq r+1$ (car $d_i \neq 1$). Les coefficients non diagonaux sont nuls. Donc $M_n \rightarrow \Delta$.

Les suites constantes (P) et (P^{-1}) convergent vers P et P^{-1} . Par le résultat admis sur les produits, $P M_n \rightarrow P \Delta$, puis $B_n = (P M_n) P^{-1} \rightarrow P \Delta P^{-1}$.

$$\boxed{M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Delta \quad \text{et} \quad B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B.}$$

4. Stochasticité de B .

- a) Par récurrence, $A^k = P D^k P^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (vrai pour $k = 0$, et $A^{k+1} = P D^k P^{-1} P D P^{-1} = P D^{k+1} P^{-1}$). Par linéarité :

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P D^k P^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k.$$

Par 1b) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n \in \mathcal{ST}_p.}$$

- b) Pour tous i, j , $(B_n)_{i,j} \geq 0$ et $(B_n)_{i,j} \rightarrow (B)_{i,j}$: par passage à la limite dans les inégalités, $(B)_{i,j} \geq 0$. Pour tout i , $\sum_{j=1}^p (B_n)_{i,j} = 1$ pour tout n ; une somme finie de suites convergentes converge vers la somme des limites, donc $\sum_{j=1}^p (B)_{i,j} = 1$.

$$B \in \mathcal{ST}_p.$$

Problème 1 – Partie III – Aspect probabiliste

$(A)_{i,j} = \mathbb{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j) = \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$, $L_n = (\mathbb{P}(X_n = 1) \ \mathbb{P}(X_n = 2) \ \mathbb{P}(X_n = 3))$, $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$.

Corrigé – Problème 1 – Partie III.

1. A est stochastique.

Comme $\mathbb{P}(X_0 = i) > 0$, $\mathbb{P}_{(X_0=i)}$ est une probabilité, donc $(A)_{i,j} \geq 0$. Les événements $(X_1 = 1)$, $(X_1 = 2)$, $(X_1 = 3)$ forment un système complet d'événements (à l'instant 1, T est dans une urne et une seule), donc

$$\sum_{j=1}^3 (A)_{i,j} = \sum_{j=1}^3 \mathbb{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j) = \mathbb{P}_{(X_0=i)}(\Omega) = 1.$$

$$A \in \mathcal{ST}_3.$$

2. Relation de récurrence.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \{1, 2, 3\}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3))$, formé d'événements de probabilités non nulles :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(X_n = i) \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^3 (L_n)_i (A)_{i,j} = (L_n A)_j.$$

Donc $L_{n+1} = L_n A$. Par récurrence : $L_0 = L_0 A^0$, et si $L_n = L_0 A^n$, alors $L_{n+1} = L_0 A^{n+1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+1} = L_n A \quad \text{et} \quad L_n = L_0 A^n.$$

3. Diagonalisation de A_1 .

La k -ème colonne de P_1 doit être un vecteur propre de A_1 associé à $(D_1)_{k,k}$, de k -ème coordonnée égale à 1. Pour $X = {}^t(x, y, z)$:

- $A_1 X = X \iff \left\{ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0, \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \right\} \iff x = y = z$: on prend ${}^t(1, 1, 1)$;
- $A_1 X = \frac{1}{2}X \iff \left\{ \frac{1}{2}x = 0, \frac{1}{2}x = 0, \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z = 0 \right\} \iff x = 0, z = 2y$: on prend ${}^t(0, 1, 2)$;
- $A_1 X = \frac{1}{3}X \iff \left\{ \frac{2}{3}x = 0, \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = 0 \right\} \iff x = y = 0$: on prend ${}^t(0, 0, 1)$.

La matrice P_1 obtenue est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, donc inversible, et $A_1 P_1 = P_1 D_1$. Pour calculer P_1^{-1} , on résout $P_1 X = Y$ avec $Y = {}^t(a, b, c) : x = a, x + y = b, x + 2y + z = c$, d'où $x = a, y = b - a, z = c - a - 2(b - a) = a - 2b + c$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}.$$

4. Limites de (D_1^n) et de (A_1^n) .

$D_1^n = \text{diag}(1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^n})$ et $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0, \frac{1}{3^n} \rightarrow 0$. Notons $\Delta_1 = \text{diag}(1, 0, 0)$. Comme en II.3, $A_1^n = P_1 D_1^n P_1^{-1} \rightarrow P_1 \Delta_1 P_1^{-1}$, par le résultat admis sur les produits. Or $P_1 \Delta_1$ a pour première colonne ${}^t(1, 1, 1)$ et les autres nulles, et la première ligne de P_1^{-1} est $(1 \ 0 \ 0)$:

$$D_1^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Limite de (L_n) .

Par 2 et le résultat admis, $L_n = L_0 A_1^n \rightarrow L_0 \Lambda$. La première coordonnée de $L_0 \Lambda$ vaut $\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(X_0 = i) = 1$, les deux autres sont nulles.

$$L_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (1 \ 0 \ 0).$$

Interprétation : d'après A_1 , l'objet placé dans l'urne 1 y reste (probabilité 1) ; depuis l'urne 2, il va dans l'urne 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$; depuis l'urne 3, avec probabilité $\frac{1}{3}$. Ainsi, par la formule des probabilités totales (même système complet qu'en 2),

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \neq 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n = 3) \leq \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n \neq 1),$$

d'où $\mathbb{P}(X_n \neq 1) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$: à chaque instant l'objet a une probabilité au moins $\frac{1}{3}$ de rejoindre l'urne 1, qu'il ne quitte plus. Il finit donc presque sûrement dans l'urne 1.

Problème 2

Problème 2 – Préliminaires – Trois séries

$$\sum \frac{1}{n^2}, \sum \frac{1}{(2k+1)^2}, \sum \frac{(-1)^n}{n^2}, \text{ avec } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Corrigé – Problème 2 – Préliminaires.

1. Convergence.

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$: elle converge. Pour $k \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{(k+1)^2}$, et $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^2}$ converge (même série, décalée) : par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge. Enfin $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$: la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est

absolument convergente.

Les trois séries convergent.

2. Somme des inverses des carrés impairs.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on sépare les indices pairs et impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}.$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, le membre de droite tend vers $\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Série alternée.

De même, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8}.$$

La série convergeant (question 1), sa somme est la limite de cette suite extraite de ses sommes partielles.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Problème 2 – Partie I – Éléments d'étude de f

$$J =]-1, +\infty[, f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

Corrigé – Problème 2 – Partie I.

1. Convergence.

Soit $x \in J$. La fonction $h : t \mapsto \frac{t^x}{1+t} = \frac{e^{x \ln t}}{1+t}$ est continue sur $]0, 1]$, et $0 \leq h(t) \leq t^x = \frac{1}{t^{-x}}$ pour $t \in]0, 1]$. Comme $-x < 1$, l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-x}}$ converge (elle est même une intégrale sur un segment si $x \geq 0$). Par comparaison de fonctions positives :

$$\forall x \in J, \quad \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt \text{ converge.}$$

2. Valeurs en 0 et 1.

$$f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2 \text{ et } f(1) = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 1 - \ln 2.$$

$$f(0) = \ln 2, \quad f(1) = 1 - \ln 2.$$

3. Encadrement et limite en $+\infty$.

Pour $t \in]0, 1]$, $1 + t \geq 1$, donc $0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq t^x$. Par croissance de l'intégrale (intégrales convergentes) et comme $x + 1 > 0$:

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^x dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{x+1}.$$

Comme $\frac{1}{x+1} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, le théorème d'encadrement donne :

$$\boxed{\forall x \in J, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

4. Monotonie.

a) Soient $x \leq y$ dans J et $t \in]0, 1]$. Comme $\ln t \leq 0$, $x \ln t \geq y \ln t$, et l'exponentielle est croissante.

$$\boxed{t^x = e^{x \ln t} \geq e^{y \ln t} = t^y.}$$

b) Si $x \leq y$, alors $\frac{t^x}{1+t} \geq \frac{t^y}{1+t}$ pour tout $t \in]0, 1]$ et, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geq f(y)$.

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } J.}$$

5. Relation fonctionnelle.

Pour $x \in J$, on a $x + 1 \in J$; par linéarité des intégrales convergentes et par le calcul de 3 :

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x(1+t)}{1+t} dt = \int_0^1 t^x dt.$$

$$\boxed{\forall x \in J, \quad f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}.$$

6. Équivalent en $+\infty$.

Soit $x > 0$, de sorte que $x - 1 \in J$. Par décroissance de f , $f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$. Avec 5 en x et en $x-1$:

$$\frac{1}{x+1} = f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1) = \frac{1}{x}.$$

Ainsi $\frac{x}{x+1} \leq 2xf(x) \leq 1$, et par le théorème d'encadrement $2xf(x) \rightarrow 1$.

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

7. Développement en série.

a) Par récurrence sur n . Pour $n = 0$, c'est la relation 5 : $f(x) = -f(1+x) + \frac{1}{1+x}$. Supposons la formule vraie au rang n . Par 5 appliquée en $n+1+x \in J$, $f(n+1+x) = \frac{1}{n+2+x} - f(n+2+x)$, donc

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+2+x} - f(n+2+x) \right) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x} \\ &= (-1)^{n+2} f(n+2+x) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k+1+x}. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

b) Par 3, $|(-1)^{n+1} f(n+1+x)| \leq \frac{1}{n+2+x} \rightarrow 0$. Donc, par a), la somme partielle $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x} = f(x) - (-1)^{n+1} f(n+1+x)$ tend vers $f(x)$.

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x} \text{ converge et } f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

8. Continuité.

a) Soient $x, y \in J$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a $k+1+x > k > 0$ et $k+1+y > k$, donc

$$\left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| = \frac{|y-x|}{(k+1+x)(k+1+y)} \leq \frac{|x-y|}{k^2}.$$

Pour $k=0$, la même égalité donne $\left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| = \frac{|x-y|}{(x+1)(y+1)}$. Par 7b), pour $N \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^N (-1)^k \left(\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right) \right| &\leq \frac{|x-y|}{(x+1)(y+1)} + |x-y| \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \\ &\leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right), \end{aligned}$$

et le membre de gauche tend vers $|f(x) - f(y)|$ quand $N \rightarrow +\infty$.

$$\left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq \frac{|x-y|}{k^2},$$

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right).$$

b) Soit $x \in J$ et $a = \frac{x-1}{2}$, qui vérifie $-1 < a < x$. Pour $y \in J$ avec $y \geq a$, on a $y+1 \geq \frac{x+1}{2}$, donc

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \xrightarrow{y \rightarrow x} 0.$$

f est continue sur J .

9. Comportement en -1 .

Par 5, pour $x \in J$, $(x+1)f(x) = 1 - (x+1)f(x+1)$. Quand $x \rightarrow -1$, $x+1 \rightarrow 0$ et, f étant continue en 0, $f(x+1) \rightarrow f(0) = \ln 2$. Donc $(x+1)f(x) \rightarrow 1$.

$$f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty.$$

Problème 2 – Partie II – Dérivabilité de f

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x} \text{ pour } k \in \mathbb{N}, x \in J, \text{ de sorte que } f = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k.$$

Corrigé – Problème 2 – Partie II.**1. Une inégalité.**

Soient $x, y \in J$ et $k \in \mathbb{N}$. On note $a = k+1+x > 0$ et $b = k+1+y > 0$, de sorte que $a-b = x-y$ et $g'_k(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{a^2}$. Alors

$$\begin{aligned} g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x) &= (-1)^k \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{a-b}{a^2} \right) = (-1)^k (a-b) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ab} \right) \\ &= (-1)^k (a-b) \frac{b-a}{a^2 b} = (-1)^{k+1} \frac{(x-y)^2}{a^2 b}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| = \frac{(x-y)^2}{(k+1+x)^2(k+1+y)}.$$

Si $k \geq 1$, on a $a > k$ et $b > k$, donc $a^2 b > k^3$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| \leq \frac{|x-y|^2}{k^3}.$$

2. Dérivée de f .

- a) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$. Pour $x \in J$ et $k \geq 1$, $|g'_k(x)| = \frac{1}{(k+1+x)^2} \leq \frac{1}{k^2}$: par comparaison avec une série de Riemann convergente, $\sum g'_k(x)$ est absolument convergente.

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3} \text{ et } \sum_{k \geq 0} g'_k(x) \text{ convergent.}$$

- b) Soit $x \in J$. On pose $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g'_k(x)$ et $C = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$. Pour $y \in J$, $y \neq x$, par I.7b) et a), les séries étant convergentes,

$$f(x) - f(y) - (x-y)S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)).$$

Par l'inégalité triangulaire sur les sommes partielles puis passage à la limite, avec 1 (cas $k=0$ et cas $k \geq 1$) :

$$|f(x) - f(y) - (x-y)S(x)| \leq (x-y)^2 \left(\frac{1}{(1+x)^2(1+y)} + C \right).$$

Pour $y \geq \frac{x-1}{2}$, on a $1+y \geq \frac{1+x}{2}$, donc, en divisant par $|x-y|$:

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} - S(x) \right| \leq |y-x| \left(\frac{2}{(1+x)^3} + C \right) \xrightarrow{y \rightarrow x} 0.$$

Ainsi f est dérivable en x , de dérivée $S(x)$, avec $g'_k(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.

$$f \text{ est dérivable sur } J \text{ et } \forall x \in J, f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.$$

c) En posant $n = k + 1$ et par le préliminaire 3 :

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

$$f'(0) = -\frac{\pi^2}{12} \simeq -0,82.$$

3. Allure de la courbe.

Bilan : f est décroissante sur J ; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ (asymptote verticale $x = -1$) ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (asymptote horizontale $y = 0$, avec $f(x) \sim \frac{1}{2x}$) ; $f(0) = \ln 2 \simeq 0,69$, $f(1) = 1 - \ln 2 \simeq 0,31$; la tangente en 0 a pour équation $y = \ln 2 - \frac{\pi^2}{12}x$.

