

**Année :** 2010

**École :** EML

**Option :** Mathématiques approfondies

## Sommaire

**Problème 1 :** *Espaces vectoriels ; réduction ; suites ; probabilité discrètes* **1**

**Problème 2 :** *Fonctions d'une variable ; séries ; intégrales ; intégrales généralisées* **4**

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

## Problème 1

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; réduction ; suites ; probabilité discrètes

### Définitions et notations

- $p$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On note  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $p$  à coefficients réels,  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices-lignes à  $p$  colonnes à coefficients réels, et  $I_p$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .
- Pour toute matrice carrée  $A$  d'ordre  $p$  et tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ ,  $(A)_{i,j}$  désigne le coefficient de  $A$  situé à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$ .
- Pour toute matrice-ligne  $L$  de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$  et tout  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $(L)_j$  désigne le coefficient de  $L$  situé à la colonne  $j$ .
- Une suite  $(A_n)_{n \geq 1}$  de matrices de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  converge vers  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , et on note  $A_n \rightarrow A$ , si et seulement si

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad (A_n)_{i,j} \rightarrow (A)_{i,j}.$$

- Une suite  $(L_n)_{n \geq 1}$  de matrices de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$  converge vers  $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$  si et seulement si

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad (L_n)_j \rightarrow (L)_j.$$

- On admet que, si  $A_n \rightarrow A$  et  $B_n \rightarrow B$  dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , alors  $A_n B_n \rightarrow AB$ . On admet aussi que, si  $A_n \rightarrow A$  et  $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ , alors  $LA_n \rightarrow LA$ .
- On appelle *matrice stochastique* toute matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad (A)_{i,j} \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \sum_{j=1}^p (A)_{i,j} = 1.$$

On note  $\mathcal{ST}_p$  l'ensemble des matrices stochastiques de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

### Partie I – Résultats généraux sur les matrices stochastiques – Illustrations

- 1) a) On note  $V$  la matrice-colonne à  $p$  lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer, pour toute  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  :

$$A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \quad (A)_{i,j} \geq 0, \\ AV = V. \end{cases}$$

- b) En déduire que toutes les matrices de  $\mathcal{ST}_p$  ont une valeur propre commune.

- 2) Démontrer :  $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p$ .

- 3) On note

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- a) Justifier, sans calcul, que  $A_1$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Donner la dimension du sous-espace propre pour  $A_1$  associé à la valeur propre 1.

- b)** En utilisant éventuellement les matrices  $A_2$  et  $A_3$  :
- (i) Montrer qu'il existe dans  $\mathcal{ST}_3$  au moins un élément non diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
  - (ii) Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Pour tout  $A \in \mathcal{ST}_3$ , le sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. »
- 4)** Soient  $A \in \mathcal{ST}_p$  et  $\lambda$  une valeur propre *réelle* de  $A$ . On note  $X = (x_1, \dots, x_p)^\top$  un vecteur propre réel de  $A$  associé à  $\lambda$ . On choisit  $i \in \{1, \dots, p\}$  tel que  $\forall k \in \{1, \dots, p\}, |x_k| \leq |x_i|$ .
- a)** Montrer :  $|\lambda x_i| \leq |x_i|$ .
  - b)** En déduire :  $|\lambda| \leq 1$ .

## Partie II – Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit  $A \in \mathcal{ST}_p$ . On note  $A^0 = I_p$ .

- 1)** **a)** Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n \in \mathcal{ST}_p$ .
- b)** Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$ .

Dans la suite de cette partie, on suppose qu'il existe  $r \in \{1, \dots, p-1\}$ ,  $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  inversible et  $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  diagonale, dont les coefficients diagonaux  $(D)_{i,i}$  sont égaux à 1 si  $i \leq r$  et distincts de 1 si  $i \geq r+1$ , tels que  $A = PDP^{-1}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k, \quad B_n = PM_nP^{-1}.$$

On note  $\Delta$  la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 si  $i \leq r$  et nuls sinon, et on note  $B = P\Delta P^{-1}$ .

- 2)** Démontrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  fixé tel que  $|x| \leq 1$  :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$$

- 3)** Montrer :  $M_n \rightarrow \Delta$  et en déduire :  $B_n \rightarrow B$ .

- 4)** **a)** Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n \in \mathcal{ST}_p$ .
- b)** En déduire :  $B \in \mathcal{ST}_p$ .

## Partie III – Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté  $T$  et de trois urnes numérotées 1, 2 et 3. À chaque instant  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T$  est dans une des trois urnes et une seule.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant  $n$ , et

$$L_n = (\mathbb{P}(X_n = 1) \ \mathbb{P}(X_n = 2) \ \mathbb{P}(X_n = 3)).$$

On suppose connues la loi de  $X_0$  et la matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad (A)_{i,j} = \mathbb{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j).$$

On suppose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = \mathbb{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j).$$

1) Montrer :  $A \in \mathcal{ST}_3$ .

2) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1} = L_n A$ , puis  $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = L_0 A^n$ .

On suppose dorénavant  $A = A_1$ , définie dans la partie I.3, et on note

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3) Déterminer  $P_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que  $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ , et calculer  $P_1^{-1}$ .

4) Déterminer la limite de  $(D_1^n)_{n \geq 1}$ , puis celle de  $(A_1^n)_{n \geq 1}$ .

5) Déterminer la limite de  $(L_n)_{n \geq 1}$ . Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.

## Problème 2

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; séries ; intégrales ; intégrales généralisées

Dans tout le problème,  $J$  désigne l'intervalle  $] -1, +\infty[$ .

Le but du problème est l'étude de l'application  $f$  définie, pour tout  $x \in J$ , par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

### Préliminaires

- 1) Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

- 2) En admettant que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , montrer :  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

- 3) En déduire :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ .

### Partie I – Éléments d'étude de $f$

- 1) Justifier, pour tout  $x \in J$ , la convergence de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$ .

- 2) Calculer  $f(0)$  et  $f(1)$ .

- 3) Montrer :  $\forall x \in J, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$ , et en déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

- 4) a) Montrer :  $\forall (x, y) \in J^2, \forall t \in ]0, 1], (x \leq y \implies t^x \geq t^y)$ .

- b) En déduire que  $f$  est décroissante sur  $J$ .

- 5) Montrer :  $\forall x \in J, f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$ .

- 6) Déduire des résultats précédents :  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ .

- 7) Soit  $x \in J$ .

- a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

- b)** En déduire que la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$  converge et que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

- 8) a)** Montrer :  $\forall (x, y) \in J^2, \forall k \in \mathbb{N}^*,$

$$\left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq |x-y| \frac{1}{k^2},$$

puis

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left( \frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right).$$

- b)** En déduire que  $f$  est continue sur  $J$ .

- 9)** Montrer :  $f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$ . En déduire la limite de  $f$  en  $-1$ .

## Partie II – Dérivabilité de $f$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $g_k$  l'application de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $J$  dans  $\mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in J$ , par

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

- 1)** Montrer :  $\forall (x, y) \in J^2, \forall k \in \mathbb{N}^*,$

$$|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| \leq \frac{|x-y|^2}{k^3}.$$

- 2) a)** Justifier la convergence des séries  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}$  et  $\sum_{k \geq 0} g'_k(x)$ , pour tout  $x \in J$ .

- b)** En déduire que  $f$  est dérivable sur  $J$  et que

$$\forall x \in J, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.$$

- c)** Déterminer  $f'(0)$ .

- 3)** Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ . On donne  $\ln 2 \simeq 0,69$ .