

ESSEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2010

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté. Pour $f \in E$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

Partie I – Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U

Partie I – L'opérateur U

$I = [1, +\infty[$, E : fonctions continues bornées sur I , $a > 0$, $(E_f) : y' - ay + f = 0$ sur I .

Corrigé – Partie I.

1. Étude de l'équation (E_f) .

a) La fonction $z : x \mapsto e^{-ax}y(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$z'(x) = e^{-ax}(y'(x) - ay(x)).$$

Ainsi y est solution de (E_f) si et seulement si $z'(x) = -e^{-ax}f(x)$ pour tout $x \in I$. Comme $t \mapsto e^{-at}f(t)$ est continue sur I , la fonction $x \mapsto -\int_1^x e^{-at}f(t) dt$ en est une primitive sur l'intervalle I ; donc $z' = -e^{-a\cdot}f$ équivaut à l'existence d'une constante K (en fait $K = z(1) = e^{-a}y(1)$) telle que $z(x) = K - \int_1^x e^{-at}f(t) dt$ pour tout $x \in I$.

$$y \text{ solution de } (E_f) \iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at}f(t) dt \right).$$

b) Soient y_1, y_2 deux solutions bornées de (E_f) . Par a), il existe K_1, K_2 tels que $y_1(x) - y_2(x) = (K_1 - K_2)e^{ax}$ pour tout $x \in I$. La fonction $y_1 - y_2$ est bornée, alors que $e^{ax} \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$: nécessairement $K_1 = K_2$.

Il existe au plus une solution de (E_f) bornée sur I .

c) Pour $t \in I$, $|e^{-at}f(t)| \leq \|f\|_\infty e^{-at}$, et $\int_1^{+\infty} e^{-at} dt$ converge (et vaut $\frac{e^{-a}}{a}$) puisque $a > 0$. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale converge absolument.

$$\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t) dt \text{ converge (absolument).}$$

d) Par c), g est bien définie et, par la relation de Chasles,

$$g(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at}f(t) dt \right) \quad \text{avec} \quad K = \int_1^{+\infty} e^{-at}f(t) dt.$$

D'après a), g est de classe $\mathcal{C}^1$ et solution de (E_f) . De plus, pour $x \in I$,

$$|g(x)| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} dt = \|f\|_\infty e^{ax} \frac{e^{-ax}}{a} = \frac{\|f\|_\infty}{a}.$$

Donc g est bornée et, par b), c'est la seule.

$$g \text{ est l'unique solution bornée de } (E_f), \text{ et } \|g\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{a}.$$

2. Linéarité de U .

a) Pour $f = 1$: $U(1)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} dt = e^{ax} \cdot \frac{e^{-ax}}{a}$.

$$U(1) = \frac{1}{a} \text{ (fonction constante).}$$

b) Pour $f \in E$, $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue, et bornée par 1.d) : $U(f) \in E$.
Pour $f_1, f_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales convergent par 1.c)),

$$U(\lambda f_1 + f_2)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} (\lambda f_1(t) + f_2(t)) dt = \lambda U(f_1)(x) + U(f_2)(x).$$

$$U \text{ est un endomorphisme de } E.$$

c) Si $U(f) = 0$, comme $g = U(f)$ vérifie $g' - ag + f = 0$, on obtient $f = ag - g' = 0$.
Donc $\text{Ker } U = \{0\}$.

$$U \text{ est injectif.}$$

d) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on pose $h_n(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt$. L'intégrale converge absolument, car $\left| \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{n!} t^n e^{-at}$ et $t^n e^{-at} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. On montre par récurrence que $h_n = U^{n+1}(f)$.

Initialisation. $h_0 = U(f) = U^1(f)$ par définition.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $h_{n-1} = U^n(f)$. Comme $U^{n+1} = U \circ U^n$ (associativité de la composition), il suffit, par 1.d), de montrer que h_n est une solution bornée de $(E_{h_{n-1}})$.

• *Dérivabilité.* Par la formule du binôme, $(t-x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (-x)^{n-k}$, d'où

$$h_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^{n-k} e^{ax} J_k(x), \quad J_k(x) = \int_x^{+\infty} t^k e^{-at} f(t) dt.$$

Comme $J_k(x) = \int_1^{+\infty} t^k e^{-at} f(t) dt - \int_1^x t^k e^{-at} f(t) dt$ avec un intégrande continu, J_k est de classe $\mathcal{C}^1$ et $J'_k(x) = -x^k e^{-ax} f(x)$. Ainsi h_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$h'_n(x) = ah_n(x) - \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) (-x)^{n-k-1} e^{ax} J_k(x) - \frac{f(x)}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (-x)^{n-k}.$$

La dernière somme vaut $(x-x)^n = 0$ car $n \geq 1$. Avec $\binom{n}{k} (n-k) = n \binom{n-1}{k}$, la somme centrale vaut

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-x)^{n-1-k} e^{ax} J_k(x) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} f(t) dt \\ &= h_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Donc $h'_n - ah_n + h_{n-1} = 0$: h_n est solution de $(E_{h_{n-1}})$.

• *Bornitude.* Le changement de variable affine $u = t - x$ (de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant, intégrales de même nature) donne

$$|h_n(x)| \leq \|f\|_\infty e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} dt = \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} e^{-au} du = \frac{\|f\|_\infty}{a^{n+1}},$$

car, avec le changement de variable $v = au$ (affine, strictement croissant), $\int_0^{+\infty} u^n e^{-au} du = \frac{1}{a^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

Par 1.d), $h_n = U(h_{n-1}) = U(U^n(f)) = U^{n+1}(f)$, ce qui achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U^{n+1}(f) : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt.$$

3. Cas des fonctions exponentielles.

a) Pour $k \geq 0$, f_k est continue et $0 < f_k \leq 1$ sur I , donc $f_k \in E$, et, comme $a+k > 0$,

$$U(f_k)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-(a+k)t} dt = e^{ax} \frac{e^{-(a+k)x}}{a+k}.$$

$$U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k.$$

b) Soit $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$. On pose $k = \frac{1}{\lambda} - a$; comme $\frac{1}{\lambda} \geq a$, on a $k \geq 0$ et $\frac{1}{a+k} = \lambda$. Par a), $(U - \lambda \text{id}_E)(f_k) = 0$ avec $f_k \neq 0$.

$$\forall \lambda \in]0, \frac{1}{a}], \quad f_{\frac{1}{\lambda}-a} \in \text{Ker}(U - \lambda \text{id}_E) \setminus \{0\}, \text{ donc } \text{Ker}(U - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\}.$$

c) Par récurrence immédiate à l'aide de a) et de la linéarité de U : $U^n(f_k) = \frac{1}{(a+k)^n} f_k$ (vrai pour $n = 0$, et $U^{n+1}(f_k) = U^n(U(f_k)) = \frac{1}{a+k} U^n(f_k)$).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U^n(f_k)(x) = \frac{e^{-kx}}{(a+k)^n}.$$

Comme $e^{-kx} > 0$, la limite dépend de la position de $a+k$ par rapport à 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [U^n(f_k)](x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a+k > 1, \\ e^{-kx} & \text{si } a+k = 1, \\ +\infty & \text{si } a+k < 1. \end{cases}$$

4. Cas des fonctions sinus et cosinus ($a = 1$).

a) $\sin$ et $\cos$ sont continues et bornées sur I : elles sont dans E . Posons $h_1 = \frac{1}{2}(\sin + \cos)$ et $h_2 = \frac{1}{2}(\cos - \sin)$, de classe $\mathcal{C}^1$ et bornées. On a

$$\begin{aligned} h'_1 - h_1 + \sin &= \frac{1}{2}(\cos - \sin) - \frac{1}{2}(\sin + \cos) + \sin = 0, \\ h'_2 - h_2 + \cos &= \frac{1}{2}(-\sin - \cos) - \frac{1}{2}(\cos - \sin) + \cos = 0. \end{aligned}$$

Donc h_1 (resp. h_2) est une solution bornée de $(E_{\sin})$ (resp. $(E_{\cos})$) ; par l'unicité de 1.d) :

$$U(\sin) = \frac{\sin + \cos}{2}, \quad U(\cos) = \frac{\cos - \sin}{2}.$$

- b) Si $\alpha \sin + \beta \cos = 0$ sur I , l'évaluation en $\frac{\pi}{2} \in I$ donne $\alpha = 0$, puis l'évaluation en $\pi \in I$ donne $\beta = 0$. La famille $(\sin, \cos)$ est donc libre, et génératrice de P par définition : c'est une base de P . Pour $f = \alpha \sin + \beta \cos \in P$, par linéarité et a), $U(f) = \alpha U(\sin) + \beta U(\cos) \in P$: P est stable par U .

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Par le calcul :

$$M^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^4 = -\frac{1}{4} I_2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, écrit $n = 4q + r$ avec $q = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Comme $M^4 = -\frac{1}{4} I_2$, $M^n = (M^4)^q M^r = \left(-\frac{1}{4}\right)^q M^r$:

$$M^{4q} = \left(-\frac{1}{4}\right)^q I_2, \quad M^{4q+1} = \left(-\frac{1}{4}\right)^q M,$$

$$M^{4q+2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^q M^2, \quad M^{4q+3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^q M^3.$$

Tous les coefficients de M^0, M, M^2, M^3 sont majorés par 1 en valeur absolue, donc chaque coefficient de M^n est majoré en valeur absolue par $\left(\frac{1}{4}\right)^{\lfloor n/4 \rfloor}$, qui tend vers 0 car $\lfloor n/4 \rfloor \rightarrow +\infty$. Par le théorème d'encadrement :

$$\text{Tous les coefficients de } M^n \text{ tendent vers 0 lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

5. Une autre famille de fonctions.

- a) φ_n est continue sur I , positive et tend vers 0 en $+\infty$ (croissances comparées), donc bornée : $\varphi_n \in E$. Pour $n \geq 1$, $x \in I$ et $A > x$, on intègre par parties sur le segment $[x, A]$ avec $u(t) = t^n$ et $v(t) = -\frac{e^{-(a+1)t}}{a+1}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $u'(t) = nt^{n-1}$, $v'(t) = e^{-(a+1)t}$:

$$\int_x^A t^n e^{-(a+1)t} dt = \frac{x^n e^{-(a+1)x} - A^n e^{-(a+1)A}}{a+1} + \frac{n}{a+1} \int_x^A t^{n-1} e^{-(a+1)t} dt.$$

Par croissances comparées, $A^n e^{-(a+1)A} \rightarrow 0$ lorsque $A \rightarrow +\infty$. En multipliant par e^{ax} , et puisque $\psi_n(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} t^n e^{-(a+1)t} dt$:

$$\forall n \geq 1, \quad \psi_n = \frac{1}{a+1} (\varphi_n + n \psi_{n-1}).$$

De plus, par la question 3.a) avec $k = 1$: $\psi_0 = \frac{1}{a+1} \varphi_0$.

- b) *Liberté.* Si $\sum_{k=0}^p c_k \varphi_k = 0$ sur I , alors $\sum_{k=0}^p c_k x^k = 0$ pour tout $x \geq 1$: ce polynôme a une infinité de racines, il est nul, et tous les c_k sont nuls. Donc $(\varphi_0, \dots, \varphi_p)$, génératrice de F_p , en est une base.

Stabilité. Montrons par récurrence que $\psi_n \in F_n$ pour tout n . C'est vrai pour $n = 0$; si $\psi_{n-1} \in F_{n-1} \subset F_n$, alors $\psi_n = \frac{1}{a+1} (\varphi_n + n \psi_{n-1}) \in F_n$. Ainsi, pour $n \leq p$, $U(\varphi_n) = \psi_n \in F_n \subset F_p$, et par linéarité $U(F_p) \subset F_p$.

$$F_p \text{ est stable par } U \text{ et } (\varphi_0, \dots, \varphi_p) \text{ en est une base.}$$

- c) On note $b = \frac{1}{a+1} \in]0, 1[$. Par a) : $U(\varphi_0) = b\varphi_0$, $U(\varphi_1) = b\varphi_1 + b\psi_0 = b^2\varphi_0 + b\varphi_1$,
 $U(\varphi_2) = b\varphi_2 + 2b\psi_1 = 2b^3\varphi_0 + 2b^2\varphi_1 + b\varphi_2$.

$$T_2 = \begin{pmatrix} b & b^2 & 2b^3 \\ 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{a+1}.$$

On écrit $T_2 = b(I_3 + N)$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & b & 2b^2 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

Comme I_3 et N commutent, la formule du binôme donne, pour $n \in \mathbb{N}$ (avec $\binom{n}{2} = 0$ si $n < 2$) :

$$T_2^n = b^n \left(I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \right).$$

Le coefficient $(1, 3)$ vaut $b^n(2nb^2 + n(n-1)b^2) = n(n+1)b^{n+2}$.

$$T_2^n = \begin{pmatrix} b^n & nb^{n+1} & n(n+1)b^{n+2} \\ 0 & b^n & 2nb^{n+1} \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

Comme $0 < b < 1$, par croissances comparées $n^j b^n \rightarrow 0$ pour $j \in \{0, 1, 2\}$:

Tous les coefficients de T_2^n tendent vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

6. Une autre expression de $U(f)$.

Soit $x \in I$. Le changement de variable $t = x + u$, affine (de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $[0, +\infty[$ sur $[x, +\infty[$), donne deux intégrales de même nature (ici convergentes), et

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-a(x+u)} f(x+u) du = e^{-ax} \int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u) du.$$

$$\forall x \in I, \quad U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt.$$

7. Positivité de U .

- a) $|f|$ est continue et bornée : $|f| \in E$. Les intégrales convergent absolument, l'inégalité triangulaire donne, pour $x \in I$,

$$|U(f)(x)| = e^{ax} \left| \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \right| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt = U(|f|)(x).$$

$$|U(f)| \leq U(|f|).$$

- b) Pour $x \in I$, $t \mapsto e^{-at}\varphi(t)$ est positive sur $[x, +\infty[$, donc par positivité de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant), $\psi(x) \geq 0$.

$$\psi \geq 0.$$

- c) Soit $x \in I$. Pour $t \geq 0$, $\varphi(x+t) \leq \varphi(x)$ car φ est décroissante. Par la question 6 et la positivité de l'intégrale,

$$a\psi(x) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} \varphi(x+t) dt \leq a\varphi(x) \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \varphi(x).$$

Comme ψ est solution de (E_φ) , $\psi' = a\psi - \varphi \leq 0$ sur l'intervalle I .

$$a\psi \leq \varphi \quad \text{et} \quad \psi \text{ est décroissante sur } I.$$

8. Commutation de U avec la dérivation.

- a) Soit $f \in E_1$; f' est continue et bornée, donc $f' \in E$. Soient $x \in I$ et $A > 0$. On intègre par parties sur le segment $[0, A]$ avec $u(t) = -\frac{e^{-at}}{a}$ et $v(t) = f(x+t)$, de classe $\mathcal{C}^1$, $u'(t) = e^{-at}$, $v'(t) = f'(x+t)$:

$$\int_0^A e^{-at} f(x+t) dt = \frac{f(x) - e^{-aA} f(x+A)}{a} + \frac{1}{a} \int_0^A e^{-at} f'(x+t) dt.$$

Comme $|e^{-aA} f(x+A)| \leq \|f\|_\infty e^{-aA} \rightarrow 0$, on obtient en faisant $A \rightarrow +\infty$ et en appliquant la question 6 à f et à f' : $U(f)(x) = \frac{f(x)}{a} + \frac{1}{a} U(f')(x)$.

$$aU(f) = f + U(f').$$

- b) $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, solution de (E_f) , donc $U(f)' = aU(f) - f = U(f')$ par a). En particulier $U(f)' = U(f')$ est bornée, donc $U(f) \in E_1$ et $D(U(f))$ a un sens.

$$\forall f \in E_1, \quad D(U(f)) = U(D(f)).$$

- c) f est décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$, donc $f' \leq 0$: $-f'$ est un élément de E à valeurs positives et, par 7.b), $U(-f') \geq 0$. Par b) et la linéarité de U , $U(f)' = U(f') = -U(-f') \leq 0$ sur l'intervalle I .

$$U(f) \text{ est décroissante sur } I.$$

Partie II – Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$

Partie II – Équivalents en $+\infty$

α, β continues sur I , $\beta > 0$, $\int_1^{+\infty} \beta$ convergente ; $f_\omega(t) = t^{-\omega}$, $g_\omega = U(f_\omega)$.

Corrigé – Partie II.

1. Résultats préliminaires.

- a) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\alpha(x) = o(\beta(x))$ et $\beta > 0$, il existe $A \geq 1$ tel que, pour tout $t \geq A$, $|\alpha(t)| \leq \varepsilon \beta(t)$. Par comparaison de fonctions positives, $\int_A^{+\infty} |\alpha(t)| dt$ converge ; α

étant continue sur $[1, A]$, $\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt$ converge (absolument) pour tout $x \in I$. Pour $x \geq A$, l'inégalité triangulaire et la positivité de l'intégrale donnent

$$\left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |\alpha(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t) dt.$$

$$\boxed{\forall x \geq A, \quad \left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t) dt.}$$

Comme β est continue et strictement positive, $\int_x^{+\infty} \beta(t) dt > 0$ pour tout x , et l'inégalité s'écrit $\left| \int_x^{+\infty} \alpha / \int_x^{+\infty} \beta \right| \leq \varepsilon$ pour $x \geq A$. Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, le quotient tend vers 0 :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right).}$$

b) On a $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$, et $\alpha - \beta$ est continue. Par a) appliquée à $\alpha - \beta$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} (\alpha - \beta)$ converge, donc aussi $\int_x^{+\infty} \alpha$ (car $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$), et :

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt - \int_x^{+\infty} \beta(t) dt = o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right).$$

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t) dt.}$$

2. Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$.

Cas $b = 0$. On pose $\alpha(t) = e^{-at} f(t)$ et $\beta(t) = e^{-at}$: elles sont continues, $\beta > 0$ et $\int_1^{+\infty} \beta$ converge. Comme $f(t) = o(1)$, $\alpha(t) = o(\beta(t))$, donc par 1.a)

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at} dt\right) = o\left(\frac{e^{-ax}}{a}\right),$$

d'où $g(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = o(1)$, c'est-à-dire $g(x) \rightarrow 0$. Cas général. $f - b \in E$ tend vers 0 en $+\infty$, donc $U(f - b) \rightarrow 0$. Par linéarité et I.2.a), $U(f) = U(f - b) + bU(1) = U(f - b) + \frac{b}{a}$.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{b}{a}.}$$

3. Cas des fonctions puissances.

a) f_ω est continue, à valeurs dans $]0, 1]$ sur I : $f_\omega \in E$. Soient $x \in I$ et $A > x$. On intègre par parties sur $[x, A]$ avec $u(t) = -\frac{e^{-at}}{a}$ et $v(t) = t^{-\omega}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $u'(t) = e^{-at}$, $v'(t) = -\omega t^{-\omega-1}$:

$$\int_x^A \frac{e^{-at}}{t^\omega} dt = \frac{e^{-ax}}{ax^\omega} - \frac{e^{-aA}}{aA^\omega} - \frac{\omega}{a} \int_x^A \frac{e^{-at}}{t^{\omega+1}} dt.$$

En faisant $A \rightarrow +\infty$ (le terme $\frac{e^{-aA}}{aA^\omega}$ tend vers 0) puis en multipliant par e^{ax} :

$$\boxed{g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x).}$$

La fonction $f_{\omega+1}$ est dans E , positive et décroissante ; par I.7.b) et c), $0 \leq ag_{\omega+1} \leq f_{\omega+1}$. Donc

$$0 \leq \frac{g_{\omega+1}(x)}{f_{\omega}(x)} \leq \frac{f_{\omega+1}(x)}{af_{\omega}(x)} = \frac{1}{ax} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

soit $g_{\omega+1} = o(f_{\omega})$, puis $g_{\omega} = \frac{f_{\omega}}{a} + o(f_{\omega})$.

$$\boxed{g_{\omega}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f_{\omega}(x)}{a}.}$$

- b) Soit $u \geq 0$. La fonction $h : s \mapsto e^{-s}$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[0, u]$ et $|h^{(n+1)}(s)| = e^{-s} \leq 1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et u donne

$$\left| e^{-u} - \sum_{k=0}^n \frac{(-u)^k}{k!} \right| \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit $x \in I$. Pour $t \in [1, x]$, avec $u = at$, et en divisant par $t > 0$:

$$\left| \frac{e^{-at}}{t} - \frac{1}{t} - \sum_{k=1}^n \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} \right| \leq \frac{a^{n+1} t^n}{(n+1)!}.$$

On intègre sur $[1, x]$ (bornes dans l'ordre croissant), en posant $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k a^k}{k k!} (x^k - 1) = \sum_{k=1}^n \frac{(-a)^k}{k!} \int_1^x t^{k-1} dt$:

$$\left| \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \ln(x) - S_n(x) \right| \leq \frac{a^{n+1}(x^{n+1} - 1)}{(n+1)(n+1)!} \leq \frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La série exponentielle $\sum \frac{(ax)^m}{m!}$ converge, donc son terme général tend vers 0 ; par le théorème d'encadrement, $S_n(x) \rightarrow \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \ln(x)$. La série converge et :

$$\boxed{\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k a^k}{k k!} (x^k - 1).}$$

Enfin, par la relation de Chasles (l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt$ converge par I.1.c)), $g_1(x) = e^{ax} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt \right)$, d'où

$$\boxed{g_1(x) = e^{ax} \left(-\ln(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k a^k}{k k!} (x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \right).}$$

4. Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_{ω} .

- a) On pose $\alpha(t) = e^{-at} f(t)$ et $\beta(t) = e^{-at} f_{\omega}(t)$: continues, $\beta > 0$, et $\int_1^{+\infty} \beta$ converge (I.1.c)). Si $f = o(f_{\omega})$, alors $\alpha = o(\beta)$ et, par 1.a), $\int_x^{+\infty} \alpha = o\left(\int_x^{+\infty} \beta\right)$. En multipliant par $e^{ax} > 0$:

$$\boxed{f \underset{+\infty}{=} o(f_{\omega}) \implies g \underset{+\infty}{=} o(g_{\omega}).}$$

- b) Avec les mêmes α et β , si $f \sim f_{\omega}$ alors $\alpha \sim \beta$, et par 1.b) puis multiplication par e^{ax} , $g \sim g_{\omega}$. Par 3.a), $g_{\omega} \sim \frac{f_{\omega}}{a}$, et $\frac{f_{\omega}}{a} \sim \frac{f}{a}$. Par transitivité :

$$\boxed{f \underset{+\infty}{\sim} f_{\omega} \implies g \underset{+\infty}{\sim} \frac{f}{a}.}$$

Partie III – Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)$

Partie III – Intégrabilité de $U(f)$

$f \in E$ avec $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ convergente, $g = U(f)$.

Corrigé – Partie III.

1. Étude d'exemples.

a) Par I.3.a), $g_k(t) = \frac{e^{-kt}}{a+k}$ et, comme $k > 0$, $\int_1^{+\infty} e^{-kt} dt = \frac{e^{-k}}{k}$.

$$\int_1^{+\infty} g_k(t) dt \text{ converge et vaut } \frac{e^{-k}}{k(a+k)}.$$

b) Par II.3.a), $g_\omega(t) \sim \frac{1}{at^\omega}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, et ces fonctions sont positives (I.7.b)). Par le critère d'équivalence pour les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} g_\omega$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\omega}$ sont de même nature ; par le critère de Riemann :

$$\int_1^{+\infty} g_\omega(t) dt \text{ converge si et seulement si } \omega > 1.$$

2. Cas des fonctions positives.

a) g est continue, donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $G' = g$. Comme $ag = g' + f$,

$$aG(x) = \int_1^x (g'(t) + f(t)) dt = g(x) - g(1) + F(x).$$

Donc $G'(x) - aG(x) = g(x) - g(x) + g(1) - F(x)$.

$$G' - aG = -F + g(1).$$

b) F est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc continue) et croissante car $f \geq 0$; ainsi $0 = F(1) \leq F(x) \leq \int_1^{+\infty} f(t) dt$: F est bornée et $F \in E$.

Posons $H = U(F) - \frac{g(1)}{a}$. Par linéarité et I.2.a), $H = U(F) - g(1)U(1) = U(F - g(1))$, donc $H' - aH + F - g(1) = 0$. Par a), G vérifie la même équation. Ainsi $\Delta = G - H$ vérifie $\Delta' - a\Delta = 0$, c'est-à-dire que Δ est solution de (E_0) ; par I.1.a) (avec $f = 0$), il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta(x) = Ke^{ax}$.

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad G(x) = Ke^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}.$$

c) Par I.1.d), $|g| \leq \frac{\|f\|_\infty}{a}$, donc $|G(x)| \leq \int_1^x |g(t)| dt \leq \frac{\|f\|_\infty}{a}(x-1) \leq \frac{\|f\|_\infty}{a}x$.

$$\forall x \in I, \quad \left| \frac{G(x)}{x} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{a}.$$

d) Pour $x \in I$, $\frac{Ke^{ax}}{x} = \frac{G(x)}{x} - \frac{U(F)(x)}{x} + \frac{g(1)}{ax}$. Le membre de droite est borné sur I par c), car $U(F) \in E$ et $0 < \frac{1}{x} \leq 1$. Si $K \neq 0$, $\left| \frac{Ke^{ax}}{x} \right| \rightarrow +\infty$ par croissances comparées, ce qui est absurde. Donc $K = 0$.

$$K = 0 \quad \text{et} \quad G = U(F) - \frac{g(1)}{a}.$$

- e) Par convergence de $\int_1^{+\infty} f$, F admet la limite finie $L = \int_1^{+\infty} f(t) dt$ en $+\infty$. Comme $F \in E$, II.2 donne $U(F)(x) \rightarrow \frac{L}{a}$, puis par d) $G(x) \rightarrow \frac{L-g(1)}{a}$, limite finie.

$$\int_1^{+\infty} g(t) dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{a} \left(\int_1^{+\infty} f(t) dt - g(1) \right).$$

3. Cas général.

La fonction $|f|$ appartient à E , est positive, et $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ converge. Par la question 2.e), $\int_1^{+\infty} U(|f|)(t) dt$ converge. Par I.7.a), $0 \leq |g| \leq U(|f|)$ sur I ; par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} |g(t)| dt$ converge.

$$\int_1^{+\infty} g(t) dt \text{ est absolument convergente.}$$