

ESSEC

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2010

Table des matières

1	Notations et objectif du problème	2
	<i>Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; applications linéaires.</i>	2
2	Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U	2
	<i>Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; applications linéaires ; réduction.</i>	2
3	Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$	4
	<i>Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées.</i>	4
4	Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)$	5
	<i>Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées.</i>	5

1 Notations et objectif du problème

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; applications linéaires.

On désigne par I l'intervalle $[1, +\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles. On fixe enfin un réel a strictement positif.

Pour f élément de E , on dit qu'une fonction y de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une solution du problème (E_f) si :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0.$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément f de E , on peut associer une unique solution g de (E_f) qui soit bornée sur I , puis d'étudier l'opérateur $U : f \mapsto g$.

2 Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; applications linéaires ; réduction.

1. Étude de l'équation (E_f) .

- a) On considère $f \in E$ et $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Écrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$. Montrer alors que y est solution du problème (E_f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

- b) Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I , celle-ci est unique.
- c) Vérifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est convergente.
- d) Démontrer que $g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est l'unique solution de (E_f) qui soit bornée sur $[1, +\infty[$.

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question d).

2. Linéarité de U .

- a) Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.
- b) Montrer que U est un endomorphisme de E .
- c) U est-il injectif ?
- d) On définit les puissances successives de U par $U^0 = \text{Id}_E$ et, pour tout entier naturel n non nul, $U^n = U^{n-1} \circ U$. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U^{n+1}(f)$ est la fonction :

$$x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt.$$

3. Cas des fonctions exponentielles.

- a) Pour k un réel positif et f_k la fonction $x \mapsto e^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.
- b) En déduire que, pour tout réel $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$, $\ker(U - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\}$.

- c) Pour tout entier naturel n , expliciter $U^n(f_k)$. Pour x élément de I , préciser

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [U^n(f_k)](x).$$

4. **Cas des fonctions sinus et cosinus.** Dans cet exemple seulement (ensemble de la question 4), on prendra $a = 1$.

- a) Expliciter $U(\sin)$ et $U(\cos)$.
 b) Montrer que le sous-espace P de E engendré par les fonctions $\sin$ et $\cos$ est stable par U et que $(\sin, \cos)$ en est une base. Dans cette base, écrire la matrice M de l'endomorphisme

$$U_P : \begin{cases} P \longrightarrow P \\ f \longmapsto U(f). \end{cases}$$

- c) Calculer M^2 , M^3 , M^4 . Expliciter M^n pour tout entier naturel n , puis préciser la limite des coefficients de M^n lorsque n tend vers l'infini.

5. **Une autre famille de fonctions.** Pour tout entier naturel n , on considère la fonction de E $\varphi_n : x \mapsto e^{-x}x^n$ et on note ψ_n la fonction $U(\varphi_n)$.

- a) Pour n entier naturel non nul, établir une relation entre ψ_n , φ_n et ψ_{n-1} .
 b) Pour p entier naturel, montrer que le sous-espace F_p de E engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$.
 c) On prend ici $p = 2$. Écrire, dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 , la matrice T_2 de l'endomorphisme

$$U_2 : \begin{cases} F_2 \longrightarrow F_2 \\ f \longmapsto U(f). \end{cases}$$

Calculer T_2^n pour tout entier naturel n , puis préciser la limite des coefficients de T_2^n lorsqu' n tend vers l'infini.

6. **Une autre expression de $U(f)$.** Pour $f \in E$, montrer que :

$$\forall x \in I, \quad U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt.$$

7. **Positivité de U .**

- a) Pour $f \in E$, montrer que $|U(f)| \leq U(|f|)$.

On considère maintenant φ un élément de E à valeurs positives et $\psi = U(\varphi)$.

- b) Montrer que ψ est à valeurs positives.
 c) On suppose que φ est décroissante. Montrer que $a\psi \leq \varphi$, puis que ψ est décroissante.

8. **Commutation de U avec la dérivation.** On note

$$E_1 = \{f \in E \cap \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \mid f' \text{ est bornée sur } I\}$$

et D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de E_1 , associe sa dérivée.

- a) Pour f un élément de E_1 , montrer, en utilisant la question 6, que : $aU(f) = f + U(f')$.
 b) En déduire que, pour tout élément f de E_1 , $D(U(f)) = U(D(f))$.
 c) Pour f une fonction de E_1 à valeurs positives et décroissante, retrouver le résultat de la question 7.c) : $U(f)$ est décroissante.

3 Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées.

On traite ici quelques cas fondamentaux, en partant d'exemples de fonctions f pour lesquelles on peut connaître le comportement de $g = U(f)$ au voisinage de $+\infty$.

1. **Résultats préliminaires.** On considère ici α et β , deux fonctions à valeurs réelles, continues sur I . On suppose que, pour tout $x \in I$, $\beta(x) > 0$ et que $\int_1^{+\infty} \beta(t) dt$ converge.

a) On suppose ici que $\alpha(x) = o(\beta(x))$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ et on se propose de montrer que

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt = o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $\exists A > 0$, tel que, pour tout $x \geq A$,

$$\left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| \leq \varepsilon \left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt \right).$$

Conclure.

b) On suppose maintenant que $\alpha(x) \sim \beta(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Montrer que

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \sim \int_x^{+\infty} \beta(t) dt \quad (x \rightarrow +\infty).$$

2. **Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$.** Si f est un élément de E admettant une limite finie b en $+\infty$ (b est un nombre réel), montrer que $g = U(f)$ admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera. On pourra commencer par traiter le cas où $b = 0$ en écrivant, dans ce cas, $f(t) = o(1)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et en utilisant la question 1.
3. **Cas des fonctions puissances.** Dans cette question et la suivante, ω est un réel strictement positif, on note f_ω la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$.

a) Montrer que $g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x)$. En déduire que $g_\omega(x) \sim \frac{f_\omega(x)}{a}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

b) Montrer que, pour tout $x \in I$,

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k a^k}{k k!} (x^k - 1)$$

(on pourra utiliser une inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $t \mapsto e^{-at}$), et en déduire :

$$g_1(x) = e^{ax} \left(-\ln(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k a^k}{k k!} (x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \right).$$

4. **Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω .** On note toujours $f \in E$ et $g = U(f)$.

a) Prouver que si f est négligeable devant f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est négligeable devant g_ω au voisinage de $+\infty$.

b) Prouver que si f est équivalente à f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est équivalente à $\frac{f}{a}$ au voisinage de $+\infty$.

4 Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)$

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées.

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de $\int_1^{+\infty} U(f)(t) dt$ dans le cas où $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ est elle-même convergente. On note toujours $g = U(f)$.

1. Étude d'exemples.

- a) Pour k un réel strictement positif et $f_k : t \mapsto e^{-kt}$, on note $g_k = U(f_k)$. Vérifier que $\int_1^{+\infty} g_k(t) dt$ est convergente.
- b) Pour ω un réel strictement positif, on note encore $f_\omega : t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$. Pour quelles valeurs de ω , $\int_1^{+\infty} g_\omega(t) dt$ est-elle convergente ?

2. Cas des fonctions positives.

Dans cette question, f est un élément de E , à valeurs positives, tel que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente. On note $F : x \in I \mapsto \int_1^x f(t) dt$, $g = U(f)$ et $G : x \in I \mapsto \int_1^x g(t) dt$.

- a) Vérifier que $G' - aG = -F + g(1)$.
- b) Justifier que F est dans E et montrer qu'il existe une constante réelle K telle que, pour tout $x \in I$,

$$G(x) = Ke^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}.$$

- c) Vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I .

- d) En déduire que $K = 0$ et que $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$.

- e) Montrer alors que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est convergente.

3. Cas général.

Dans cette question, f est un élément de E tel que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente. Montrer que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est absolument convergente.